Nom :

Devoir surveillé numéro 5 (vendredi 21/02/2025)

<u>Consignes :</u> L'usage de la calculatrice est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le devoir est noté sur 22,5 puis ramener à 20.

Exercice 1 : produit scalaire dans le plan (1+ 1= 2 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1.Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points $A(2\,;-1), B(4\,;2)\ et\ C(3\,;-3)$.

a)Déterminer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b)En déduire une valeur approchée en degré de l'angle $\widehat{BAC}$.

2. Déterminer une équation cartésienne de la perpendiculaire à (AB) passant par C.

Exercice 2 : étude de limites (0,75+0,75+1,5=3 points)

Les questions sont indépendantes.

1.Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \frac{\cos(x)}{x}$.

2.Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x^2$.

3. Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2 - x + 1)$

Exercice 3 : valeurs intermédiaires(0,75 +0,5+0,75+1+0,5=3,5 points)

On définit la fonction f sur $[1\,;+\infty[$ par : pour tout réel $x \geq 1$, $f(x) = x - 2\ln(x)$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$..

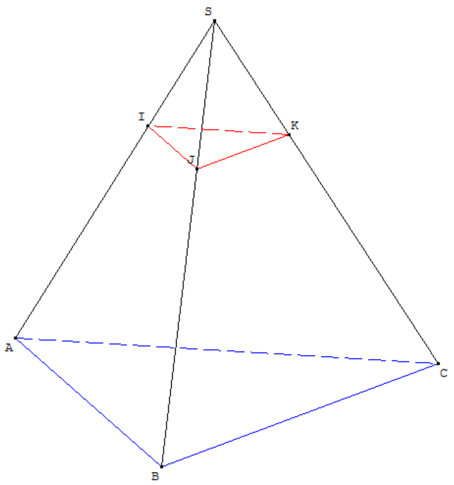
2.On admet que f est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ .Donner sans justifier $f'(x)$.
(on pourra écrire f'(x) sous la forme d'une fraction)

3.En déduire le tableau de variations complet de f.

4.Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[1\,;+\infty[$.

5.Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,01.

Exercice 4 : parallélisme entre deux plans (1+1=2 points)



Soit SABC un tétraèdre. On considère les points I,J,K tels que $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$.

1.Démontrer à l'aide de la relation de Chasles que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. On admet que $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

2.Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

Nom :

Exercice 5 : vecteurs colinéaires , coplanaires (0,5 + 1 +1= 2,5 points)

Dans un repère orthonormé de l'espace , on considère les points :$A(2\,;3\,;4), B(3\,;0\,;4)$, $C(5\,;6\,;7)$ et $D(8\,;7\,;13)$.

1.Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2.Démontrer que les points A,B et C définissent un plan

3.Démontrer que les points A,B,C et D ne sont pas coplanaires .

Exercice 6 :représentation paramétrique de droite (1+1,5+1,5=4 points)

Les questions sont indépendantes.

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1 .Soit les points $A(2\,;3\,;-1)$ et $B(1\,;-3\,;2)$.Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

(on écrira au préalable une représentation paramétrique de la droite (AB))

2.Soit A et B les points de coordonnées $A(1\,;1\,;-2)$ et $B(2\,;-1\,;3)$.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2t \\ y = -4t \\ z = \frac{1}{2} + 10t \end{cases}$ $avec \quad t \in \mathbb{R}$.

Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifier

3.Soit les droites (d) et (d') de représentations paramétriques respectives:

$\begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 + 3k \\ z = 2k \end{cases}$ $avec\ k \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$ $avec \quad t \in \mathbb{R}$

Démontrer que (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

Exercice 7 : parallélisme droite-plan (0,5+0,75+0,75 + 1,5 =3,5points)

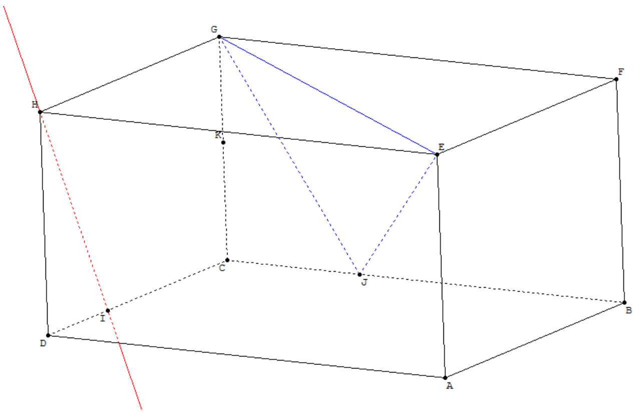
ABCDEFGH est un cube. I et J sont les points définis par :

$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{GJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

2. Déterminer deux réels x et y tels que $\overrightarrow{HI} = x\,\overrightarrow{EG} + y\,\overrightarrow{GJ}$.

3. Que peut-on en déduire pour la droite (HI) et le plan (EGJ) ?



Exercice 8 : prise d'initiative (2 points)

ABCDEFGH est un pavé droit. Le point I est défini par

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$. Démontrer que les points I,B,D et E sont coplanaires.