Nom :

Devoir surveillé numéro 5 (vendredi 21/02/2025)

<u>Consignes :</u> L'usage de la calculatrice est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le devoir est noté sur 22,5 puis ramener à 20.

Exercice 1 : produit scalaire dans le plan (1+ 1= 2 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1.Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points $A(2\,;-1), B(4\,;2)\ et\ C(3\,;-3)$.

a) $\overrightarrow{AB}\binom{2}{3}$, $\overrightarrow{AC}\binom{1}{-2}$. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\times 1 + 3\times(-2) = -4$

b) $\mathrm{AB} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ $\mathrm{AC} = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$

On en déduit que $AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = -4$.

Par conséquent, $\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{4}{\sqrt{65}}$ et $\widehat{BAC} = cos^{-1}\left(-\frac{4}{\sqrt{65}}\right) \approx 119{,}74°$

2. La perpendiculaire à (AB) passant par C a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}\binom{2}{3}$.

Une équation cartésienne de cette droite est donc : $2x+3y+c=0$.

Or $C(3\,;-3)$. appartient à cette droite

On en déduit que $2\times 3 + 3\times(-3) + c = 0$ soit $c = 3$

Une équation cartésienne de la perpendiculaire à (AB) passant par C est donc :$2x+3y+3=0$.

Exercice 2 : étude de limites (0,75+0,75+1,5=3 points)

Les questions sont indépendantes.

1.Pour tout $x > 0$, $-1 \le \cos(x) \le 1$

Ainsi:$-\frac{1}{x} \le \frac{\cos(x)}{x} \le \frac{1}{x}$

Et donc :$x - \frac{1}{x} \le x + \frac{\cos(x)}{x} \le x + \frac{1}{x}$

$x + \frac{\cos(x)}{x} \ge x - \frac{1}{x}$

Or on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \frac{1}{x} = +\infty$

D'après le théorème de comparaison, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \frac{\cos(x)}{x} = +\infty$.

2.Pour tout $x > 0$, $e^x - x^2 = x^2(\frac{e^x}{x^2} - 1)$

Par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} - 1 = +\infty$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

Par limite d'un produit, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - 1\right) = +\infty$ ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x^2 = +\infty$

3. Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2 - x + 1)$

Pour tout $x > 0$, $x^2 - x + 1 = x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 1$.

Comme limite d'un produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x + 1 = +\infty$

De plus , $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$

On en déduit par limite de fonction composée que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2 - x + 1) = +\infty$.

Nom :

Exercice 3 : valeurs intermédiaires(0,75 +0,5+0,75+1+0,5=3,5 points)

On définit la fonction f sur $[1\,;+\infty[$ par : pour tout réel $x \geq 1$, $f(x) = x - 2\ln(x)$.

1. Pour tout $x > 0$, $x - 2\ln(x) = x(1 - 2\frac{\ln(x)}{x})$

Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - 2\frac{\ln(x)}{x} = 1$

De plus , $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Par limite d'un produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$..

2.On admet que f est dérivable sur $[1\,;+\infty[$.

Pour tout réel $x \geq 1$, $f'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$.

3. Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x - 2$.

x	1		2		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
$f'(x)$	1	$\searrow$	$2 - 2ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = 1 - 2\ln(1) = 1$ $\quad$ $f(2) = 2 - 2\ln(2)$

La fonction f est strictement décroissante sur $[1\,;2]$ et strictement croissante sur $[2\,;+\infty[$

4.

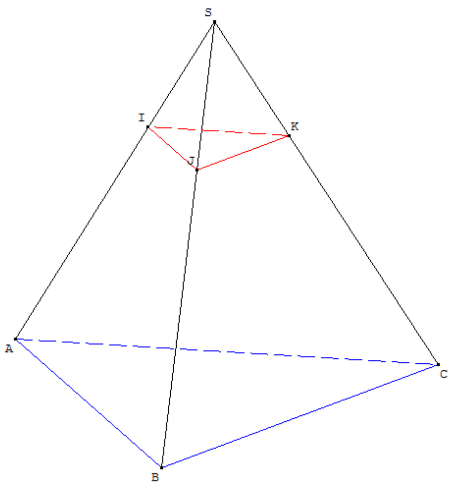
Sur $[1\,;2]$, $f(x) \leq 1$. L'équation $f(x) = 2$ n'admet donc pas de solutions sur $[1\,;2]$.

Sur $[1\,;+\infty[$.

- f est continue et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.
- $2 \in]f(2); \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$
- D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution α sur $[1\,;+\infty[$.

5. A l'aide de la technique de balayage, on obtient : $5 < \alpha < 6$ puis $5{,}3 < \alpha < 5{,}4$ puis $5{,}35 < \alpha < 5{,}36$

Exercice 4 : parallélisme entre deux plans (1+1=2 points)



Nom :

Soit SABC un tétraèdre. On considère les points I,J,K tels que $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$,$\overrightarrow{SJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$et $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$.

1. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{SJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. On admet que $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

2.Deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) : $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. On en déduit que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

Exercice 5 : vecteurs colinéaires , coplanaires (0,5 + 1 +1= 2,5 points)

Dans un repère orthonormé de l'espace , on considère les points :$A(2\,;3\,;4), B(3\,;0\,;4)\,, C(5\,;6\,;7)\ et\ D(8\,;7\,;13)$.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}6\\4\\9\end{pmatrix}$.

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ (le système $\begin{cases} 3 = k \\ 3 = -3k \\ 3 = 0 \end{cases}$ n'admettant pas de solutions)

On en déduit que les points A,B et C définissent bien un plan

3.

Supposons que $a\,\overrightarrow{AB} + b\,\overrightarrow{AC} + c\,\overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

On en déduit que $\begin{cases} a + 3b + 6c = 0 \\ -3a + 3b + 4c = 0 \\ 3b + 9c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3(-3c) + 6c = 0 \\ -3a + 3(-3c) + 4c = 0 \\ b = -3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3c \\ -3(3c) - 5c = 0 \\ b = -3c \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a = 3c \\ -14c = 0 \\ b = -3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

On en déduit qu'il n'existe pas de triplets (a, b, c) non tous nuls tels que $a\,\overrightarrow{AB} + b\,\overrightarrow{AC} + c\,\overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{AB}\,, \overrightarrow{AC}\ et\ \overrightarrow{AD}\ ne$ sont pas coplanaires et donc les points A,B,C et D ne le sont pas non plus.

Exercice 6 :représentation paramétrique de droite (1+1,5+1,5=4 points)

1 .Soit les points $A(2\,;3\,;-1)\ et\ B(1\,;-3\,;2)$.

La droite (AB) passe par le point $A(2\,;3\,;-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-6\\3\end{pmatrix}$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 6t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ (t∈ ℝ)

On résout le système :

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 6t \\ z = -1 + 3t \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 6t \\ z = -1 + 3t \\ -1 + 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \\ y = 3 - 6 \times \frac{1}{3} = 1 \\ z = 0 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

La droite (AB) coupe le plan $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en $C(\frac{5}{3}\ ;1\,;0)$.

Nom :

2.Soit A et B les points de coordonnées $A(1\,;1\,;-2)\ et\ B(2\,;-1\,;3)$.

Soit (d) la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2t \\ y = -4t \\ z = \frac{1}{2} + 10t \end{cases} \quad avec \quad t \in \mathbb{R}$.

$A(1\,;1\,;-2) \in (d) \Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases} 1 = \frac{3}{2} + 2t \\ 1 = -4t \\ -2 = \frac{1}{2} + 10t \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{4} \\ 10t = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{4} \\ t = -\frac{1}{4} \\ t = -\frac{5}{20} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}$$

$B(2\,;-1\,;3).\in (d) \Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases} 2 = \frac{3}{2} + 2t \\ -1 = -4t \\ 3 = \frac{1}{2} + 10t \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{4} \\ 10t = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{4} \\ t = \frac{1}{4} \\ t = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$$

Comme A et B appartiennent à la droite (d) alors la droite (AB) est la droite (d). L'affirmation est donc vraie.

3.Soit les droites (d) et (d') de représentations paramétriques respectives:

$\begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 + 3k \\ z = 2k \end{cases} \quad avec\ k \in \mathbb{R} \quad et \quad \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \quad avec \quad t \in \mathbb{R}$

(d) admet le vecteur $\vec{u}(1; 3; 2)$ comme vecteur directeur.

(d') admet le vecteur $\overrightarrow{u'}(1; -1; 4)$ comme vecteur directeur.

$\vec{u}(1; 3; 2)$ et $\overrightarrow{u'}(1; -1; 4)$ ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{u'} = k\vec{u}$ (le système $\begin{cases} 1 = k \\ -1 = 3k \\ 4 = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -\frac{1}{3} \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$ n'admettant pas de solutions)

Par conséquent, les droites (d) et (d') ne sont pas parallèles.

Nom :

Prouvons que les droites ne se coupent pas.

On résout le système

$$\begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 + 3k \\ z = 2k \\ x = -2 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 + 3k \\ z = 2k \\ 3 + k = -2 + t \\ -2 + 3k = 2 - t \\ 2k = 1 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 + 3k \\ z = 2k \\ k = -5 + t \\ -2 + 3(-5 + t) = 2 - t \\ 2(-5 + t) = 1 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 + 3k \\ z = 2k \\ k = -5 + t \\ -17 + 3t = 2 - t \\ -10 + 2t = 1 + 4t \end{cases}$$

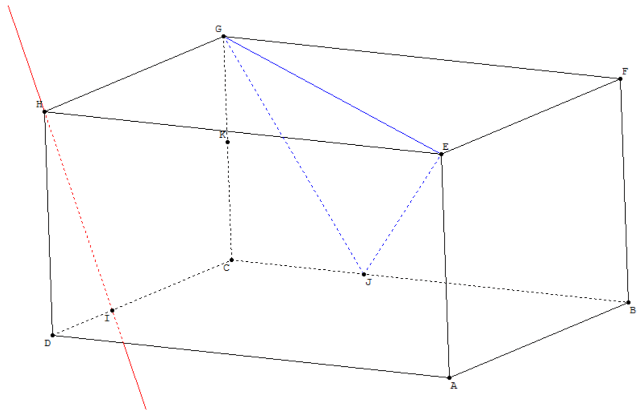
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 + 3k \\ z = 2k \\ k = -5 + t \\ 4t = 19 \\ -2t = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 + 3k \\ z = 2k \\ k = -5 + t \\ t = \frac{19}{4} \\ t = -\frac{11}{2} \end{cases} \quad \text{impossible !}$$

Les droites (d) et (d’) ne sont donc ni sécantes , ni parallèles. Elles sont donc non coplanaires.

<u>Exercice 6 : parallélisme droite-plan (0,5+0,75+0,75 + 1,5 =3,5points)</u>

ABCDEFGH est un cube. I et J sont les points définis par :

$$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$



1. $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DI} = -\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$

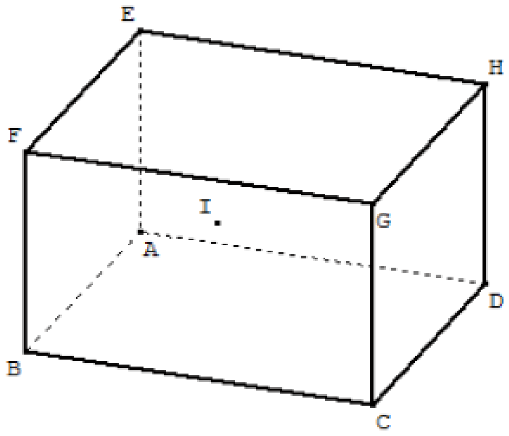
2. $\frac{1}{3}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{HI}$

*3.*On en déduit que $\frac{1}{3}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GJ} - \overrightarrow{HI} = \vec{0}$. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{HI}$ est coplanaire avec deux vecteurs non colinéaires (directeurs) du plan (EGJ) : $\overrightarrow{EG}$ *et* $\overrightarrow{GJ}$.

On en déduit donc que la droite (HI) est parallèle au plan (EGJ).

Nom :

Exercice 7 : prise d'initiative (2 points)



ABCDEFGH est un pavé droit. Le point I est défini par

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$. Démontrer que les points I,B,D et E sont coplanaires.

On se place dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

$A(0\,;0\,;0\,), B(1\,;0\,;0), D(0\,;1\,;0), E(0;0;1) et G(1\,;1\,;1)$

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$. On en déduit que $I(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3})$

$\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Supposons que $a\,\overrightarrow{IB} + b\,\overrightarrow{ID} + c\,\overrightarrow{IE} = \vec{0}$.

On en déduit que $\begin{cases} \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c = 0 \\ -\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c = 0 \\ -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b - c = 0 \\ -a + 2b - c = 0 \\ -a - b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - c \\ -a + 2(2a - c) - c = 0 \\ -a - (2a - c) + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} b = 2a - c \\ 3a - 3c = 0 \\ -3a + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2c - c = c \\ a = c \end{cases}$

On peut prendre $a = b = c = 1$.

On a : $1\,\overrightarrow{IB} + 1\,\overrightarrow{ID} + 1\,\overrightarrow{IE} = \vec{0}$.

On en déduit qu'il existe un triplet (a, b, c) non tous nuls tels que $a\,\overrightarrow{IB} + b\,\overrightarrow{ID} + c\,\overrightarrow{IE} = \vec{0}$.

Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{ID}$ *et* $\overrightarrow{IE}$ sont coplanaires et donc les points I,B,D,E le sont aussi.