Nom :

Devoir surveillé numéro 6 (jeudi 17/04/2025)

<u>Consignes :</u> L'usage de la calculatrice est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le devoir est noté sur 20,5.

Exercice 1 : vrai-faux à justifier (1+1,25+1,25 = 3,5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est juste ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : Soit (E) l'équation différentielle : $y' - 2y = -6x + 1$.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - 6x + 1$ est une solution de l'équation différentielle (E).

Affirmation 2 :

On suppose que pour tout entier naturel n, $1 - 0,5^n \leq u_n \leq \frac{n^2+n+2}{n^2+1}$
On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

Affirmation 3 :

La solution de l'équation différentielle $2y' - 3y = 5$ et $y(1) = \frac{2}{3}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = \frac{7}{3} e^{\frac{3}{2}(x-1)} - \frac{5}{3}$

Exercice 2 : primitives - calcul intégral (0,5+0,5+1,25+1,25+1=4,5 points)

<u>Les questions sont indépendantes</u>

1. Donner **sans justifier** une primitive de la fonction *f* définie sur R par *f(x)*= $x^3 - 2x^2 + 1$.
2. Donner **sans justifier** une primitive de de la fonction *f* définie sur R par $f(x) = e^{2x-3}$.
3. Calculer $\int_1^4 \frac{6x+3}{x^2+x+2} dx$.
4. Calculer $\int_0^1 (x+1)e^{x^2+2x} dx$.
5. Calculer $\int_0^1 e^x dx + \int_1^2 e^x dx + \int_3^4 e^x dx - \int_3^2 e^x dx$ (écrire $\int_3^2 e^x dx$ à l'aide d'une autre intégrale)

6.Volontaires : donner sans justifier $\sum_{i=0}^{n} \int_i^{i+1} e^x dx$ (bonus : 0,5point)

Exercice 3 : (d'après bac) (1,5+ 1+0,5=3 points)

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ telle que :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.
La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe, **à rendre avec la copie**.

```python
from math import*
def f(x):
    return(x/(exp(x)-x))
def rectangle(n):
    A=0
    x=0
    h=1/n
    for i in range(1,n+1):
        A=A+h*f(x)
        x=x+h
    return(A)
```

On considère le programme ci-contre :
1.Reproduire et compléter le tableau d'état des variables ci-dessous
, tableau permettant de déterminer la valeur de A lorsque l'on entre dans la console : **rectangle(4)** .

i	A	x
1		
2		
3		
4		

2. En l'illustrant sur l'annexe **à rendre avec la copie**, donner une interprétation graphique du résultat affiché par cet algorithme pour $K = 8$.

(ne faire aucun calcul - utiliser la 2ème courbe)

3. Que donne l'algorithme lorsque K devient grand ?

(utiliser la 1ère courbe)

Nom :

Exercice 4 : d'après bac (A : 0,25+1,25+1+1+1+0,5+ 0,5+0,75+0,75 B :1+0,5+1= 9,5 points)

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que $1 m^3 = 1000$ L.
Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.
Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en mg. L^{-1}, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et 3 mg.L^{-1}.
Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.
Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à 0,01 mg.L^{-1}.
Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de 0,70 mg. L^{-1}.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de 0,3 mg. L^{-1}.
2. Pour tout entier naturel n, on note v_n le taux de chlore, en mg. L^{-1}, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0,7$.
   On admet que pour tout entier naturel n,
   $$v_{n+1} = 0,92 v_n + 0,3.$$
   a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.
   b. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
   c. Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par , $w_n = v_n - 3,75$.
   Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,92.
   d. Exprimer w_n puis v_n en fonction de n.
   e. Retrouver le résultat de la question 2b) c'est-à-dire déterminer d'une autre manière la limite de la suite (v_n).
3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes? Justifier la réponse,
4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-contre écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.
5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)`?
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```
def alerte_chlore(s) :
  n=0
  v=0.7
  while ___________ :
      n= ______
      v= ______
  return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu

Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.

Nom :

Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en mg. L^{-1}, dans la piscine.
On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad y' = -0{,}08y + \frac{q}{50}$$

où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-0{,}08x} + \frac{q}{4}$ où C est une constante réelle.

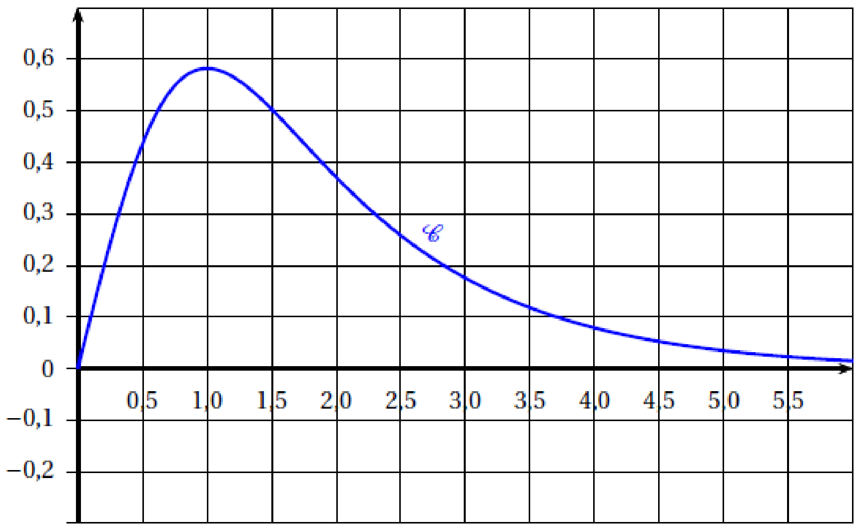
2. **a.** Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.

b. On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à 0,7 mg.L^{-1}.
On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de 2 mg.L^{-1}.
Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.

Nom :

Annexe exercice 3:

Courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f sur $[0\,;\,6]$



Courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f sur $[0\,;\,1]$