

Nom :

Correction du devoir surveillé numéro 6 (jeudi 17/04/2025)

Exercice 1 : vrai-faux à justifier (1+1,25+1,25 = 3,5 points)

Affirmation 1 :

Pour tout réel x , $f'(x) = 2e^{2x} - 6$

$$f'(x) - 2f(x) = 2e^{2x} - 6 - 2(e^{2x} - 6x + 1) = 2e^{2x} - 6 - 2e^{2x} + 12x - 2 = 12x - 8$$

f n'est donc pas solution de l'équation différentielle $y' - 2y = -6x + 1$

FAUX

Affirmation 2 :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$ car $-1 < 0,5 < 1$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - 0,5^n = 1$

$$\frac{n^2 + n + 2}{n^2 + 1} = \frac{n^2(1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2})}{n^2(1 + \frac{1}{n^2})} = \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

On en déduit donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n + 2}{n^2 + 1} = 1$

Comme $1 - 0,5^n \leq u_n \leq \frac{n^2 + n + 2}{n^2 + 1}$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - 0,5^n = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n + 2}{n^2 + 1} = 1$

Alors d'après le théorème des Gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

VRAI

Affirmation 3 :

La solution de l'équation différentielle $2y' - 3y = 5$ et $y(1) = \frac{2}{3}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{7}{3}e^{\frac{3}{2}(x-1)} - \frac{5}{3}$$

$$2y' - 3y = 5 \Leftrightarrow y' = \frac{3}{2}y + \frac{5}{2} \quad a = \frac{3}{2} \quad b = \frac{5}{2}$$

- Une solution particulière constante est la fonction : $x \mapsto -\frac{b}{a} = -\frac{5}{3}$.
- Les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{3}{2}y$ sont de la forme : $x \mapsto Ce^{\frac{3}{2}t}$, $C \in \mathbb{R}$.
- Les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{3}{2}y + \frac{5}{2}$ sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto Ce^{\frac{3}{2}x} - \frac{5}{3}, C \in \mathbb{R}$$

$$f(1) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow Ce^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow Ce^{\frac{3}{2}} = \frac{7}{3} \Leftrightarrow C = \frac{7}{3}e^{-\frac{3}{2}}$$

$$f(x) = \frac{7}{3}e^{-\frac{3}{2}}e^{\frac{3}{2}x} - \frac{5}{3} = \frac{7}{3}e^{\frac{3}{2}(x-1)} - \frac{5}{3}$$

VRAI

Nom :

Exercice 2 : primitives - calcul intégral (0,5+0,5+1,25+1,25+1=4,5 points)

1. Une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + x$.

2. Une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x-3}$ est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-3}$.

3. Calculer $I = \int_1^4 \frac{6x+3}{x^2+x+2} dx$.

f est continue sur $[1; 4]$ donc admet des primitives

$$*f = 3 \times \frac{u'}{u}$$

$$*u(x) = x^2 + x + 2 \quad u'(x) = 2x + 1$$

$$*F = 3 \times \ln(u)$$

$$F(x) = 3 \times \ln(x^2 + x + 2)$$

$$I = [3 \ln(x^2 + x + 2)]_1^4 = 3 \ln(4^2 + 4 + 2) - 3 \ln(1^2 + 1 + 2) = 3 \ln(22) - 3 \ln(4) = 3 \ln\left(\frac{11}{2}\right)$$

4. Calculer $I = \int_0^1 (x+1)e^{x^2+2x} dx$.

f est continue sur $[0; 1]$ donc admet des primitives

$$*f = \frac{1}{2} \times u' e^u$$

$$*u(x) = x^2 + 2x \quad u'(x) = 2x + 2$$

$$*F = -\frac{1}{2} \times e^u \quad F(x) = -\frac{1}{2} \times e^{-x^2}$$

$$I = \left[\frac{1}{2} e^{x^2+2x} \right]_0^1 = \frac{1}{2} e^3 - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} e^3 - \frac{1}{2}$$

5

$$\int_0^1 e^x dx + \int_1^2 e^x dx + \int_2^3 e^x dx + \int_3^4 e^x dx = \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 e^x dx + \int_2^3 e^x dx + \int_3^4 e^x dx$$

$$= \int_0^4 e^x dx \text{ (relation de Chasles)}$$

$$= [e^x]_0^4 = e^4 - e^0 = e^4 - 1$$

$$6. \sum_{i=0}^n \int_i^{i+1} e^x dx = \int_0^{n+1} e^x dx = [e^x]_0^{n+1} = e^{n+1} - e^0 = e^{n+1} - 1$$

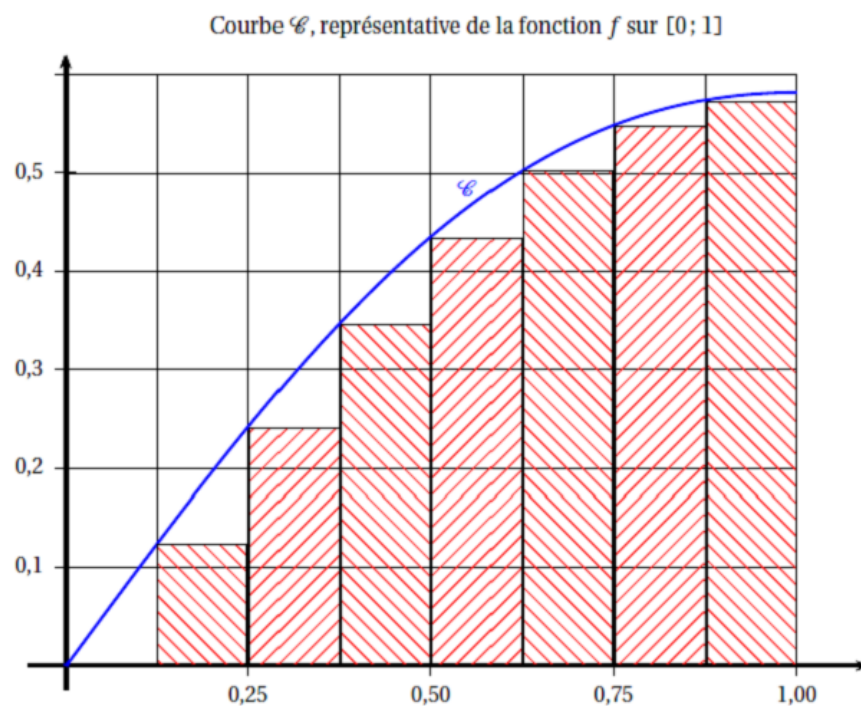
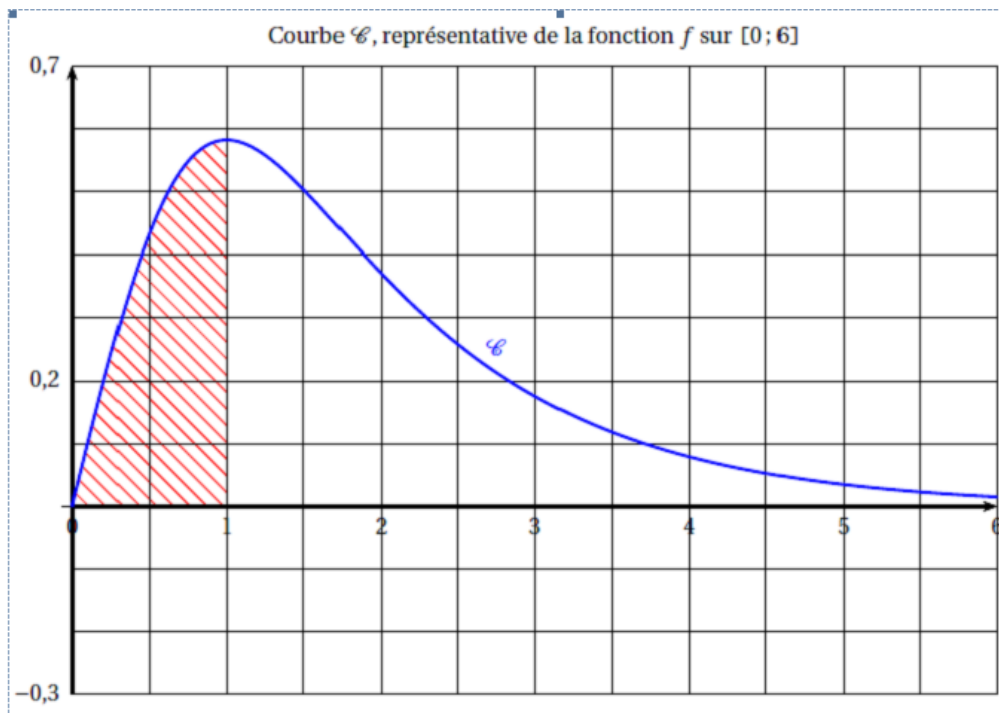
Exercice 3 : (d'après bac) (1,5+1+0,5=3 points)

Nom :

1. On fait fonctionner l'algorithme pour $K = 4$ donc pour $h = 0,25$:

i	A	x
1	0	0,25
2	0,060	0,5
3	0,169	0,75
4	0,306	1

2. Pour $K = 8$, l'algorithme donne la somme des aires des rectangles hachurés sur le graphique du bas de la page 10.
3. Quand K devient grand, l'algorithme donne une valeur approchée par défaut de l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ (voir page 10, le graphique du haut).



Nom :

Exercice 4 : d'après bac (A : 0,25+1,25+1+1+1+0,5+ 0,5+0,75+0,75 B : 1+0,5+1= 9,5 points)

Partie A : étude d'un modèle discret.

1. Ajouter 15 g, soit 15 000 mg, de chlore, dans une piscine de 50 m^3 , soit 50 000 L, c'est donc faire augmenter la concentration de : $\frac{15000}{50000} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0,3 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

2.a) On réalise un raisonnement par récurrence.

Soit $P(n)$ la proposition « $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$ ». (n entier naturel)

• **1^{ère} étape : initialisation**

vérifions que $P(0)$ est vraie. D'une part, $v_0 = 0,7$

D'autre part, $v_1 = 0,92v_0 + 0,3 = 0,944$. Donc, $v_1 \leq v_2 \leq 4$

$P(0)$ est donc vraie.

• **2^{ème} étape : hérédité**

Hypothèse : on suppose que pour un entier k quelconque $P(k)$ est vraie c'est-à-dire $v_k \leq v_{k+1} \leq 4$

But : démontrons alors que $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq 4$.

$$v_k \leq v_{k+1} \leq 4$$

$$0,92v_k \leq 0,92v_{k+1} \leq 0,92 \times 4$$

$$0,92v_k + 0,3 \leq 0,92v_{k+1} + 0,3 < 3,68 + 0,3$$

$$v_k \leq v_{k+1} \leq 3,98 \leq 4$$

$$v_k \leq v_{k+1} \leq 4$$

$P(k+1)$ est vraie

Conclusion : la proposition est vraie au rang 0 et est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n .

b. De la question précédente, on retient :

- $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_{n+1}$ donc la suite (v_n) est croissante;
- $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq 4$ donc la suite (v_n) est majorée par 4.

Conclusion : la suite (v_n) est croissante et majorée par 4. D'après le théorème de convergence des suites monotones, la suite (v_n) converge vers un réel $L \leq 4$.

Calcul de la limite :

La suite (v_n) converge vers L et $v_{n+1} = f(v_n)$ où $f(x) = 0,92x + 0,3$.

De plus, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème du point fixe, L est solution de l'équation $f(L) = L$.

Soit : $0,92L + 0,3 = L$ d'où $L - 0,92L = 0,3$ soit $0,08L = 0,3$ et $L = \frac{0,3}{0,08} = 3,75$. La suite (v_n) converge donc vers 3,75.

c) Pour tout n ,

$$w_{n+1} = v_{n+1} - 3,75 = 0,92v_n + 0,3 - 3,75 = 0,92v_n - 3,45 = 0,92 \left(v_n - \frac{3,45}{0,92} \right) = 0,92w_n$$

On en déduit que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,92 de 1^{er} terme $w_0 = 0,7 - 3,75 = -3,05$.

Nom :

d) Pour tout n , $w_n = w_0 q^n = -3,05 \times 0,92^n$

Ainsi, $v_n = w_n + 3,75 = -3,05 \times 0,92^n + 3,75$.

e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,92^n = 0$ car $-1 < 0,92 < 1$.

Par conséquent, d'après les opérations sur les limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -3,05 \times 0,92^n + 3,75 = 3,75$

3. À long terme, le taux de chlore ne sera pas conforme à la préconisation des piscinistes, car si la limite est 3,75 alors tout intervalle ouvert contenant 3,75 contiendra tous les termes à partir d'un certain rang. Notamment l'intervalle $]3 ; 5[$.

Il existe donc un rang à partir duquel les termes de la suite seront dans l'intervalle $]3 ; 5[$, et donc la concentration en chlore dépassera strictement la limite supérieure de $3 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$ recommandée par les piscinistes.

4.

Le programme complété est donc :

```
def alerte_chlore(s):  
    n = 0  
    u = 0.7  
    while u <= s :  
        n = n + 1  
        u = 0.92*u + 0.3  
    return n
```

5. En saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)`, le programme renvoie 17 (en effet, $v_{16} \approx 2,95 \leq 3$ et $v_{17} \approx 3,01 > 3$).

Dans le contexte de l'exercice, cela veut dire que si Alain applique cette méthode, 17 jours après le 19 juin, le taux de chlore dans sa piscine serait trop élevé, par rapport aux recommandations des piscinistes.

Partie B : étude d'un modèle continu.

1. Les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$, où a et b sont des réels (a non nul), ont pour solutions les équations de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

Ici, avec $a = -0,08$ et $b = \frac{q}{50}$, cela conduit à :

$$x \mapsto Ce^{-0,08x} - \frac{\frac{q}{50}}{-0,08} = Ce^{-0,08x} + \frac{q}{50 \times 0,08}.$$

Nom :

On arrive donc bien à une solution f de la forme $f(x) = Ce^{-0,08x} + \frac{q}{4}$ où C est une constante réelle.

2. a. Puisque $-0,08 < 0$, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -0,08x = -\infty$
donc, par composition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,08x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$
puis, par limite du produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} Ce^{-0,08x} = 0$
enfin, par limite de la somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{q}{4}$.

- b. Si on veut que le taux de chlore se stabilise autour de $2 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$, il faut que la limite de la fonction f soit 2, donc on veut :

$$\frac{q}{4} = 2 \iff q = 8.$$

Pour cet objectif à long terme, Alain devra donc ajouter 8 grammes de chlore par jour dans sa piscine.

À l'instant $t = 0$, on avait donc un taux de $0,7 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$, donc $f(0) = 0,7$.

$$f(0) = 0,7 \iff Ce^{-0,08 \times 0} + \frac{8}{4} = 0,7$$

$$\iff C + 2 = 0,7$$

$$\iff C = -1,3$$

La fonction f donnant l'évolution du taux de chlore dans la piscine d'Alain est donc : $f : x \mapsto -1,3e^{-0,08x} + 2$.