

Devoir surveillé numéro 7 (lundi 26/05/2025)

Consignes : L'usage de la calculatrice est autorisé. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1: propriété de l'espérance et de la variance (0,75 + 0,75 = 1,5 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes

1. Soit X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** telles que $E(X) = 2$, $V(X) = 0,3$, $E(Y) = 1,5$ et $V(Y) = 0,2$. Déterminer $E(3X + 2Y)$, $V(X + Y)$ et $V(4X)$.
2. Soit $(X_1, X_2, \dots, X_{10})$ un échantillon de taille 10 de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi **d'espérance 2 et d'écart type 3**.
Soit M_{10} la variable aléatoire **moyenne** de l'échantillon. Donner l'espérance et la **variance** de M_{10} .

Exercice 2: inégalités de Bienaymé Tchebychev et de concentration (0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,75 + 0,75 = 3,5 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes

1. Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X) = 4$ et de variance $V(X) = 0,05$.
 - a) Ecrire l'inégalité de Bienaimé Tchebychev.
 - b) Démontrer que $P(|X - 4| \geq 0,5) \leq 0,2$
 - c) En déduire une minoration de $P(3,5 < X < 4,5)$
2. Soit une variable aléatoire X d'espérance $E(X) = 5,2$ et de variance $V(X) = 0,3$.
On considère un échantillon de n variables aléatoires suivant la loi de X .
On appelle M_n la variable aléatoire moyenne associée à cet échantillon.
 - a) Ecrire l'inégalité de concentration.
 - b) Démontrer que $P(5 < M_n < 5,4) \geq 1 - \frac{7,5}{n}$
 - c) Déterminer la taille n de l'échantillon tel que la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle $]5; 5,4[$ soit supérieure à 0,95.

Exercice 3: valeur moyenne d'une fonction (0,75+0,75=1,5 points)

1. Soit la fonction f définie sur $[0 ; 4]$ par $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

L'existence des primitives étant admise, déterminer une primitive de f .

2. Calculer la valeur moyenne de la fonction f définie sur $[0 ; 5]$ par $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Exercice 4: suite d'intégrale (0,5+0,75+0,75+0,75+0,75=3,5 points)

On considère la suite d'intégrales (u_n) définie pour tout entier n , par : $u_n = \int_0^1 x^n e^x dx$

1. Calculer u_0 .
2. Démontrer, sans calcul, que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 (x-1)x^n e^x dx$.
4. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
5. Que peut-on en déduire ? Justifier.

Exercice 5: D'après Amérique du Nord 2025 (2 + 0,5 + 1 = 3,5 points)

1. Soit la fonction f définie sur $[0 ; \pi]$ par $f(x) = e^x \sin(x) + x$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

On admet que f est positive sur $[0 ; \pi]$.

On note :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx.$$

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes :

$$I = 1 + J \quad \text{et} \quad I = e^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

2. En déduire que $I = \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.

Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

(cf annexe)

Exercice 6: Amérique du Nord 2025 (A : 0,5 + 1+0,5+0,5+1,5 B : 1,5+1,5 = 7 points)

Au basket-ball, il est possible de marquer des paniers rapportant un point, deux points ou trois points.

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Partie A

L'entraîneur d'une équipe de basket décide d'étudier les statistiques de réussite des lancers de ses joueurs. Il constate qu'à l'entraînement, lorsque Victor tente un panier à trois points, il le réussit avec une probabilité de 0,32.

Lors d'un entraînement, Victor effectue une série de 15 lancers à trois points. On suppose que ces lancers sont indépendants.

On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. On admet que la variable aléatoire N suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers lors de cette série.
3. Déterminer la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers lors de cette série.
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire N .
5. On note T la variable aléatoire qui donne le nombre de **points** marqués après cette série de lancers.
 - a. Exprimer T en fonction de N .
 - b. En déduire l'espérance de la variable aléatoire T . Donner une interprétation de cette valeur dans le contexte de l'exercice.
 - c. Calculer $P(12 \leq T \leq 18)$.

Partie B

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points marqués par Victor lors d'un match.

On admet que l'espérance $E(X) = 22$ et la variance $V(X) = 65$.

Victor joue n matchs, où n est un nombre entier strictement positif.

On note $X_1, X_2, \dots, X_n$ les variables aléatoires donnant le nombre de points marqués au cours des 1^{er}, 2^e, ..., n -ième matchs. On admet que les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent la même loi que celle de X .

On pose $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

1. Dans cette question, on prend $n = 50$.
 - a. Que représente la variable aléatoire M_{50} ?
 - b. Déterminer l'espérance et la variance de M_{50} .
 - c. Démontrer que $P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$.
 - d. En déduire que la probabilité de l'évènement « $19 < M_{50} < 25$ » est strictement supérieure à 0,85.
2. Indiquer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :
« Il n'existe aucun entier naturel n tel que $P(|M_n - 22| \geq 3) < 0,01$ ».

ANNEXE (exercice 5)

