Correction du devoir surveillé numéro 7 (lundi 26/05/2025)

Exercice 1: propriété de l'espérance et de la variance (0,75 + 0,75 = 1,5 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes

1.Soit X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** telles que $E(X) = 2$, $V(X) = 0{,}3$, $E(Y) = 1{,}5$ et $V(Y) = 0{,}2$.

$E(3X + 2Y) = 3E(X) + 2E(Y) = 9$, **(linéarité de l'espérance)**

$V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 0{,}5$ $car\ X\ et\ Y\ sont\ indépendantes$

$V(4X) = 4^2V(X) = 4{,}8$.

2.Soit $(X_1, X_2, \dots, X_{10})$ un échantillon de taille 10 de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi **d'espérance 2** et **d'écart type** 3. C'est-à-dire de variance $3^2 = 9$.

Soit M_{10} la variable aléatoire **moyenne** de l'échantillon.

$E(M_{10}) = E(X) = 2$.

$V(M_{10}) = \frac{V(X)}{10} = \frac{9}{10} = 0{,}9$

Exercice 2: inégalités de Bienaymé Tchebychev et de concentration (0,5 +0,5+0,5 + 0,5+0,75+0,75= 3,5 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes

1.Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X) = 4$ et de variance $V(X) = 0{,}05$.

a) D'après l'inégalité de Bienaimé Tchebychev :

Pour tout réel strictement positif δ, on a :

$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$

b)On remplace E(X) par 4 , V(X) par 0,05 et $\delta\ par\ 0{,}5$

$P(|X - 4)| \geq 0{,}5) \leq \frac{0{,}05}{0{,}5^2}$ soit $P(|X - 4| \geq 0{,}5) \leq 0{,}2$

c) On utilise l'évènement contraire

$1 - P(|X - 4| < 0{,}5) \leq 0{,}2$

Soit $-P(|X - 4| < 0{,}5) \leq -0{,}8$

Et donc $P(|X - 4| < 0{,}5) \geq 0{,}8$

On en déduit que $P(3{,}5 < X < 4{,}5) \geq 0{,}8$

2. Soit une variable aléatoire X d'espérance $E(X) = 5{,}2$ et de variance $V(X) = 0{,}3$.

On considère un échantillon de n variables aléatoires suivant la loi de X.

On appelle M_n la variable aléatoire moyenne associée à cet échantillon.

a) D'après l'inégalité de concentration :

Pour tout réel strictement positif δ, on a :

$P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\,\delta^2}$

b) On remplace E(X) par 5,2 , V(X) par 0,3 et $\delta\ par\ 0{,}2$

$P(|M_n - 5{,}2| \geq 0{,}2) \leq \frac{0{,}3}{n\ 0{,}2^2}$

Soit $1 - P(|M_n - 5{,}2| < 0{,}2) \leq \frac{7{,}5}{n}$

D'où $-P(|M_n - 5{,}2| < 0{,}2) \leq -1 + \frac{7{,}5}{n}$

Et $P(|M_n - 5{,}2| < 0{,}2) \geq 1 - \frac{7{,}5}{n}$

c)Il suffit de résoudre l'inéquation $1 - \frac{7{,}5}{n} \geq 0{,}95$.

Soit $-\frac{7{,}5}{n} \geq -0{,}05$ et donc $\frac{7{,}5}{n} \leq 0{,}05$.

Par passage à l'inverse , $\frac{n}{7{,}5} \geq \frac{1}{0{,}05}$ soit encore $n \geq \frac{7{,}5}{0{,}05}$ soit $n \geq 150$.

La probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle $]5; 5{,}4[$ est supérieure à 0,95 lorsque $n \geq 150$.

Exercice 3: valeur moyenne d'une fonction (0,75+0,75=1,5 points)

1.Soit f la fonction définie sur $[0\,;5]$ par $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

f est continue sur $[0\,;5]$ donc admet des primitives. Une primitive de f est la fonction F.

- $f=\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$
- $u(x)=x^2+1 \quad u'(x)=2x \quad (\frac{u'}{u}=\frac{2x}{x^2+1})$
- $F=\frac{1}{2}\ln(u)$

Pour tout réel x de $[0\,;5]$, $F(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

$\int_0^5 \frac{x}{x^2+1}dx=\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^5=\frac{1}{2}\ln(5^2+1)-\frac{1}{2}\ln(0^2+1)=\frac{1}{2}\ln(26)$

2.La valeur moyenne de la fonction f définie sur $[0\,;5]$ par $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ est

$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{5-0}\int_0^5 f(x)\,dx=\frac{1}{10}\ln(26)$

Exercice 4: suite d'intégrale (0,5+0,75+0,75+0,75+0,75=3,5 points)

On considère la suite d'intégrales (u_n) définie pour tout entier n, par :$u_n=\int_0^1 x^n\,e^x\,dx$

1. $u_0=\int_0^1 x^0\,e^x\,dx=\int_0^1 e^x\,dx=[e^x]_0^1=e^1-e^0=e-1.$
2. Pour tout entier naturel n,
   Pour tout réel x de $[0\,;1]$, $e^x\geq 0 \quad et \quad x^n\geq 0$.
   On en déduit que $x^n\,e^x\geq 0$
   Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^1 x^n\,e^x\,dx\geq 0$.
   Ainsi , $u_n\geq 0$.
3. Pour tout entier naturel n,
   $u_{n+1}-u_n=\int_0^1 x^{n+1}\,e^x\,dx-\int_0^1 x^n\,e^x\,dx$
   $=\int_0^1(x^{n+1}\,e^x-x^n e^x)dx$ (par linéarité de l'intégrale)
   $=\int_0^1(x-1)x^n\,e^x\,dx.$
4. Pour tout entier naturel n,
   Pour tout réel x de $[0\,;1]$, $x^n\,e^x\geq 0$ et $x-1\leq 0$
   On en déduit que $(x-1)x^n\,e^x\leq 0$
   Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^1(x-1)x^n\,e^x\,dx\leq 0$.
   Et donc que $u_{n+1}-u_n\leq 0$
   On en déduit que la suite (u_n) est décroissante.
5. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 alors d'après le théorème de convergence des suites monotones , la suite (u_n) converge.

Exercice 5: D'après Amérique du Nord 2025 (2 + 0,5 + 1 = 3,5 points)

1.Soit la fonction f définie sur $[0\,;\pi]$ par $f(x) = e^x \sin(x) + x$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

On admet que f est positive sur $[0\,;\pi]$.

On note :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes :

$$I = 1 + J \qquad \text{et} \qquad I = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

On pose : $v(x) = \sin(x) \quad \rightarrow \quad v'(x) = \cos(x)$

$u'(x) = e^x \quad \rightarrow \quad u(x) = e^x$

u et v deux fonctions dérivables sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ de dérivées continues sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)\,v(x)dx = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)\,dx$$

$$= [e^x \times \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \times \cos(x)\,dx$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - e^0 \sin(0) - J$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - J$$

On pose : $v(x) = \mathrm{e}^x \quad \rightarrow \quad v'(x) = \mathrm{e}^x$

$u'(x) = \sin(x) \quad \rightarrow \quad u(x) = -\cos(x)$

u et v deux fonctions dérivables sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ de dérivées continues sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)\,v(x)dx = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)\,dx$$

$$= [-e^x \times \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \times -\cos(x)\,dx$$

$$= -e^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + e^0 \cos(0) + J$$

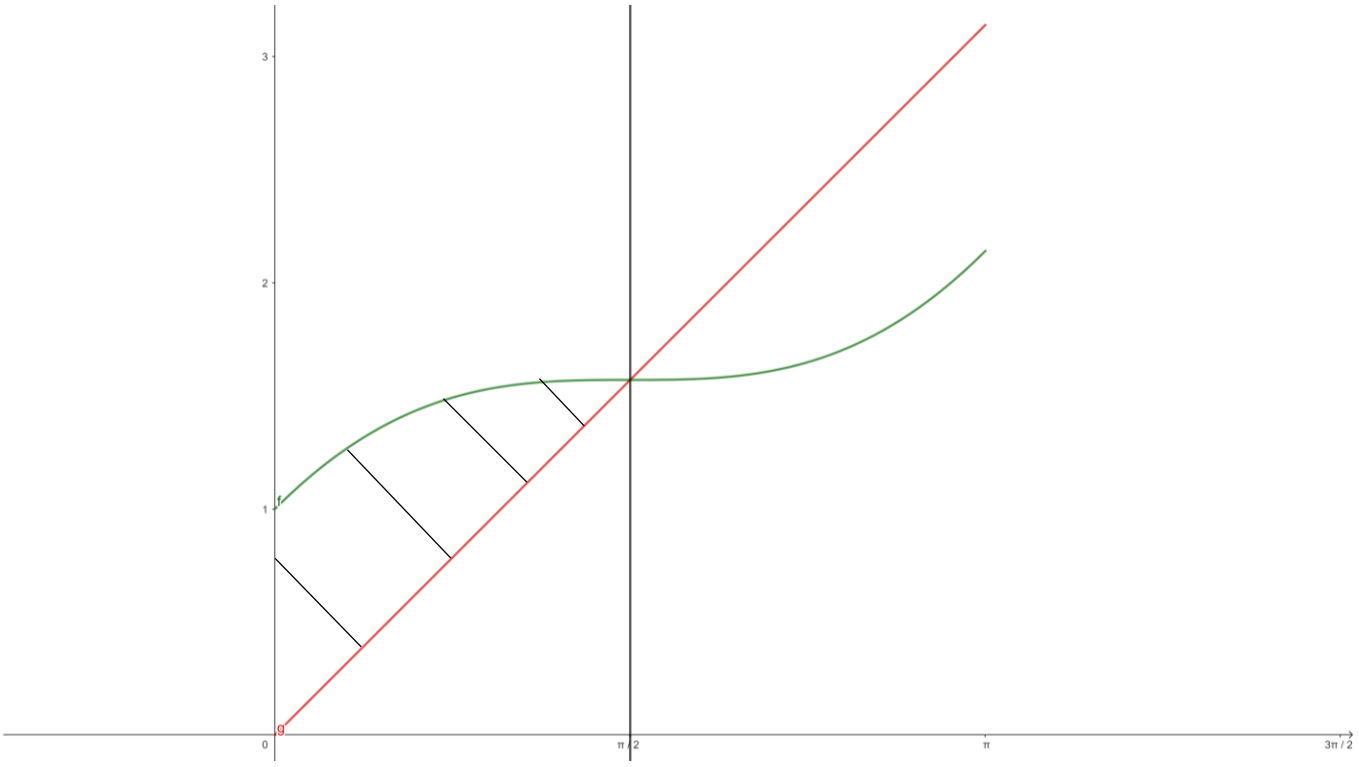
$$= 1 + J$$

2. On a le système $\begin{cases} I = 1 + J \\ I = e^{\frac{\pi}{2}} - J \end{cases}$ soit $\begin{cases} I = 1 + J \\ 1 + J = e^{\frac{\pi}{2}} - J \end{cases}$ soit $\begin{cases} I = 1 + J \\ 2J = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \end{cases}$ oit $\begin{cases} I = 1 + \frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2} = \frac{1+e^{\frac{\pi}{2}}}{2} \\ J = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2} \end{cases}$

3.L'aire du domaine compris entre les courbes de f , les courbes de g et les droites d'équation x=0 et x=$\frac{\pi}{2}$ est : (il est admis que Cff est au dessus de Cg)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x \sin(x) + x - x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x)dx = \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$$

ANNEXE (exercice 5)



Exercice 6: Amérique du Nord 2025 (A : 0,5 + 1+0,5+0,5+1,5 B : 1,5+1,5 = 7 points)

Partie A

On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. L'épreuve est effectuée 15 fois de façon indépendante et à chaque lancer la probabilité de marquer est égale à 0,32. N suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(15\,;\,0,32)$.
2. La probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers est :
   $P(N = 4) = \binom{15}{4} \times 0,32^4 \times (1 - 0,32)^{15-4} \approx 0,206$ au millième près.
3. La probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers est :
   $P(N \leqslant 6) = P(N = 0) + P(N = 1) + \ldots + P(N = 6) \approx 0,828$ (calculatrice).
4. On sait que : $E(N) = n \times p = 15 \times 0,32 = 4,8$.
   Donc en moyenne sur 150 lancers, Victor marque 48 paniers.

5. **a.** Chaque lancer étant à 3 points, on a donc $T = 3N$.

b. On a $E(T) = E(3N) = 3E(N)$ d'après la linéarité de l'espérance, soit $E(T) = 3 \times 4,8 = 14,4$, donc une moyenne de 144 points marqués sur 150 lancers.

c. On a $P(12 \leqslant T = 3N \leqslant 18) = P(4 \leqslant N \leqslant 6)$.
Cette probabilité est égale à :
$P(4 \leqslant N \leqslant 6) = P(N = 4) + P(N = 5) + P(N = 6) \approx 0,206 + 0,213 + 0,167$, soit

$$P(12 \leqslant T \leqslant 18) \approx 0,586.$$

Partie B

1. Dans cette question, on prend $n = 50$.

a. M_{50} représente la moyenne empirique, sur 50 matchs, des points marqués par Victor

b. • Chaque variable $X_1, \ldots, X_{50}$ suit la même loi que X donc on a :
$E(M_{50}) = E(X) = 22$;
• Comme les variables X_1, X_2,... X_50 sont indépendantes, on en déduit :
$V(M_{50}) = \frac{1}{50}V(X) = \frac{1}{50} \times 65 = \frac{65}{50} = \frac{130}{100} = 1,3.$

c)D'après l'inégalité de concentration :
Pour tout réel strictement positif δ, on a :
$P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\,\delta^2}$
On remplace n par 50 E(X) par 22 , V(X) par 65 et δ par 3
$P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{65}{50 \times 3^2}$
soit $P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$
d)Soit $1 - P(|M_{50} - 22| < 3) \leq \frac{13}{90}$
D'où $-P(|M_{50} - 22| < 3) \leq -\frac{77}{90}$
Et $P(|M_{50} - 22| < 3) \geq \frac{77}{90}$ or $\frac{77}{90} > 0,85$
On en déduit que $P(19 < M_{50} < 25) > 0,85$.
2.D'après la loi des grands nombres :
Pour tout réel strictement positif δ, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq \delta) = 0$$

Soit en remplaçant δ par 3
$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - 22| \geq 3) = 0$ L'affirmation est donc fausse.

<u>Autre méthode :</u>
D'après l'inégalité de concentration :
Pour tout réel strictement positif δ, on a :
$P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\,\delta^2}$
On remplace E(X) par 22 , V(X) par 65 et δ par 3
$P(|M_n - 22| \geq 3) \leq \frac{65}{n \times 3^2}$
soit $P(|M_n - 22| \geq 3) \leq \frac{65}{9n}$

On veut donc que : $\frac{65}{9n} \leqslant 0,01$

On trouve $\frac{9n}{65} \geq 100$ soit $n \geq \frac{6500}{9}$ et donc $n \geq 723$