Exercices sur le chapitre 2 (théorème des valeurs intermédiaires)

Exercice 1:

Soit f la fonction définie sur $[-6\ ;6]$ par $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2x-2$.

1. Etudier les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variations.
2. Montrer que l'équation *f(x)=0* admet exactement 3 solutions que l'on nomme x_1, x_2 *et* x_3.
3. Déterminer un encadrement à 10^{-2} de chacune des solutions. En déduire un arrondi à 1 décimale de chacune des solutions.
4. Déterminer le signe de *f(x)* en fonction de *x*.

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie sur [0 ;5] par $f(x) = e^{-3x+1} - x$.
1. On admet que la fonction f est dérivable sur [0 ;5] . Donner sans justifier *f'(x)*.
2 . Dresser le tableau des variations de la fonction f .
3. Démontrer que l'équation *f(x)=0* admet exactement une solution : α. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4.Dresser le tableau de signe de la fonction *f*.

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [0 ;4] par

$$f(x) = xe^{-x} - 0{,}1.$$

1. On admet que la fonction f est dérivable sur [0 ;4] . Déterminer en justifiant $f'(x)$.
2. Déterminer en justifiant le tableau de variations de f .
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0; 1]$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 0,001.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur [0 ;10] par $f(x) = (2x-5)e^{-x+4} + 20$.

Partie A

1. Montrer que , pour tout réel x de [0 ;10], $f'(x) = (-2x+7)e^{-x+4}$.
2. Déterminer en justifiant le tableau de variations de f sur l'intervalle [0 ;10].
3. Justifier que l'équation *f(x)=0* admet une unique solution α sur [0 ;10] .
4. Déterminer le tableau de signe de *f(x)*.
5. Déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de α.

Partie B

Une entreprise fabrique entre 0 et 1000 objets par semaine.
Le bénéfice en milliers d'euros, que réalise cette entreprise lorsqu'elle fabrique et vend *x*

d'objets est modélisé par la fonction f définie sur [0 ;10] par $f(x) = (2x-5)e^{-x+4} + 20$.
1. Quel est le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximum ? Quel est ce bénéfice maximal en euros ?
2. A partir de combien d'objets fabriqués et vendus, l'entreprise réalise t'elle un bénéfice strictement positif ?

Exercice 5 :

PARTIE A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0;6]$ par

$$f(x) = 1-(x+1)e^{-x}.$$

1. Montrer que $f'(x) = xe^{-x}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. Démontrer que l'équation $f(x)=0,5$ admet une solution unique α sur l'intervalle [0 ;6].
Déterminer une valeur approchée de α à 0,01.

PARTIE B

Une entreprise lance la production de batteries pour véhicules électriques.
Une étude a modélisé le rythme de la production journalière sur les six premiers mois à l'aide de la fonction f définie dans la partie A pour x compris entre 0 et 6.
x représente le nombre de mois (de 30 jours) depuis le lancement du produit.
$f(x)$ représente la production journalière de batteries en milliers.

Exprimer en mois puis en jours le moment où la production atteindra 0,5 millier soit 500 unités.

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur [3 ;13] par $f(x) = -2x+20-e^{-2x+10}$.

A-Etude de la fonction *f*

1. On admet que f est dérivable sur [3 ;13] . Donner sans justifier $f'(x)$.Puis résoudre dans [3 ;13] , l'inéquation $f'(x)>0$.
2. Dresser à l'aide de la question précédente le tableau de variations complet de la fonction f.
(on admet que $f(3)=14-e^{4}$ et $f(13)=-6-e^{-16}$*)*
3. a) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement 2 solutions dans [3 ;13] . La plus petite sera appelée α , la plus grande β. *(on appliquera le théorème qu'une seule fois si nécessaire)*
b) Déterminer à l'aide des questions 2 et 3a), le tableau de signe de la fonction f.
c) Donner sans justifier une valeur approchée à 2 décimales de α et de β.

B-Application

Une usine fabrique et commercialise des toboggans. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 300 et 1 300.
Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de toboggans est modélisé sur l'intervalle [3 ;13] par la fonction f.
En utilisant la partie A , répondre aux questions suivantes :
1. Déterminer le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal, et donner ce bénéfice, arrondi à l'euro.
2. Combien de toboggans, cette usine doit-elle produire chaque mois afin de réaliser un bénéfice strictement positif ?

Exercice 7:

Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue.
L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3 600 poulies par semaine. On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine. (x varie donc dans l'intervalle $[0\,;3{,}6]$).
Le bénéfice hebdomadaire est noté $B(x)$, il est exprimé en milliers d'euros.

L'objet de cet exercice est d'étudier cette fonction B. Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : étude graphique

On a représenté, en annexe 2, la fonction B dans un repère du plan.
Chaque résultat sera donné à cent poulies près ou à cent euros près suivant les cas.
Les traits utiles à la compréhension du raisonnement seront laissés sur le graphique et une réponse écrite sur la copie sera attendue pour chaque question posée.

1. Déterminer dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13 000 euros.
2. Quel est le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise ?
   Pour quel nombre N de poulies fabriquées et vendues semble-t-il être réalisé ?

Partie B : étude théorique

Le bénéfice hebdomadaire noté $B(x)$, exprimé en milliers d'euros vaut

$$B(x) = -5 + (4-x)\mathrm{e}^{x}.$$

1. **a.** On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
   Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $I = [0\,;\,3{,}6]$, on a :
   $$B'(x) = (3-x)\mathrm{e}^{x}$$
   b. Déterminer le signe de la fonction dérivée B' sur l'intervalle I.
   c. Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle I.
   On indiquera les valeurs de la fonction B aux bornes de l'intervalle.
2. **a.** Justifier que l'équation $B(x) = 13$ admet deux solutions x_1 et x_2, l'une dans l'intervalle $[0\,;\,3]$ l'autre dans l'intervalle $[3\,;\,3{,}6]$.
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 0,01 près de chacune des deux solutions.

Annexe 2

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;10]$ par :

$$f(x) = 1 + \left(-4x^2 - 10x + 8\right) e^{-0,5x}.$$

1. On note f' la fonction dérivée de f.
   Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-4\,;10]$:

$$f'(x) = \left(2x^2 - 3x - 14\right) e^{-0,5x}.$$

2. Dresser, en justifiant, le tableau des variations de f sur l'intervalle $[-4\,;10]$.
   On donnera les valeurs exactes des éléments du tableau.

3. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-4\,;-2]$.

   b. On considère l'algorithme ci-contre.

   Recopier et compléter la deuxième ligne du tableau ci-dessous correspondant au deuxième passage dans la boucle.

```
a ← −4
b ← −2
Tant que (b − a) > 10^−1
    m ← (a + b)/2
    p ← f(a) × f(m)
    Si p > 0 alors
        a ← m
    Sinon
        b ← m
    Fin Si
Fin Tant que
```

	m	signe de p	a	b	$b-a$	$b-a>10^{-1}$
Initialisation			-4	-2	2	VRAI
Après le 1er passage dans la boucle	-3	Négatif	-4	-3	1	VRAI
Après le 2e passage dans la boucle						

   c. À la fin de l'exécution de l'algorithme, les variables a et b contiennent les valeurs $-3{,}1875$ et $-3{,}125$. Interpréter ces résultats dans le contexte de l'exercice.

Exercice 9 :

Partie A : Etude d'une première fonction

On note f la fonction définie sur $[0{,}3; 1]$ par $f(x) = x - e^{-x}$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0{,}3; 1]$
4. Donner un encadrement de α à 0,1.
5. Dresser le tableau de signes de f.

Partie B : Etude d'une deuxième fonction – application économique

Une entreprise produit et vend des pièces pour hélicoptères. Pour des raisons de stockage, sa

mensuelle est comprise entre 300 et 1 000 pièces. Elle vend tout ce qui est produit.

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0,3; 1]$ par $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

$g(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en dizaine de milliers d'euros, obtenu pour la vente de x centaines de pièces.

1. On admet la dérivabilité de g .Montrer que pour tout réel x de $[0,3; 1]$, $g'(x) = \frac{-e^x f(x)}{(1+e^x)^2}$.
2. Déterminer en justifiant le tableau de variations de g
3. Quelle est la quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximal ?

Calculer ce bénéfice arrondi à 100 euros près.

Exercice 10 :

Partie A

On considère la fonction C définie sur l'intervalle [5 ; 60] par :

$$C(x) = \frac{e^{0,1x} + 20}{x}.$$

1. On désigne par C' la dérivée de la fonction C.

   Montrer que, pour tout $x \in [5 ; 60]$, $C'(x) = \frac{0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20}{x^2}$.
2. On considère la fonction f définie sur [5 ; 60] par

   $$f(x) = 0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20.$$

   a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur [5 ; 60].

   b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans [5 ; 60].

   c. Donner un encadrement à l'unité de α.

   d. En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur [5 ; 60].
3. En déduire le tableau de variations de C sur [5 ; 60].
4. En utilisant le tableau de variations précédent, déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :

   a. $C(x) = 2$. b. $C(x)=5$.

Partie B

Une entreprise fabrique chaque mois x vélos de course, avec x appartenant à l'intervalle [5 ; 60].
Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production de x vélos de course, est donné par la fonction C définie dans la partie A.
Déterminer le nombre de vélos à produire pour que le coût de fabrication moyen soit minimal.