Exercices sur le chapitre 3

Exercice 1: seuil

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n *par*, $u_n = 3 \times 0,9^n + 10$.

1.Etudier la limite de la suite u.

2.Ecrire un algorithme permettant de déterminer le seuil à partir duquel $u_n \leq 10,000\,000\,01$.

Exercice 2 : opérations sur les limites

1.Etudier : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - 5n^2 + 4n + 1$.

2.Etudier : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2-3}{n^2+1}$.

3.Etudier : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^n-1}{5^n+1}$.

Exercice 3 : théorèmes de comparaison

Etudier : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5 + \frac{(-1)^n}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\big(2 + sin(n)\big)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,5)^n \cos(n)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n + \sin(n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(2^n)}{n}$

Exercice 4 : théorèmes de comparaison

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n + 2n + 3 \quad \text{pour tout entier naturel} \quad n. \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

   b. Quelle est la limite de la suite (u_n)?
3. Conjecturer une expression de u_n, en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Exercice 5 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in N$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4n + 8$.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que $\forall n \in N^*$, $u_n \geq 6$. En déduire que $\forall n \in N*$, $u_{n+1} \geq 4n + 10$
3. En déduire que $\forall n \geq 2$, $u_n \geq 4n + 6$.
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 6n - 3$ $(\forall n \in N)$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b) Montrer que $\forall n \in N$, $u_n = 6n + 3 + 2\times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

c) Retrouver le résultat de la question 4

Exercice 6 : théorème de convergence

Sur une petite ile de proche de l'Antarctique, on a observé l'évolution d'une population de manchots empereurs. 600 manchots vivent sur cette ile au 1er juin 2020.

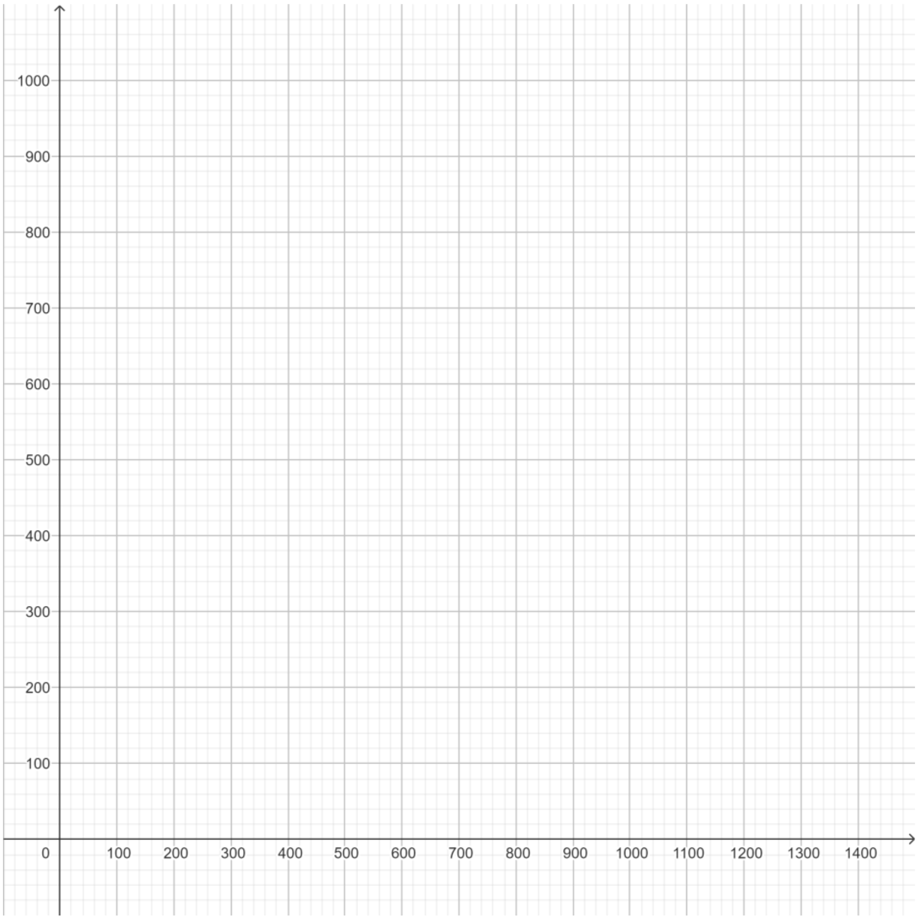
On note u_n l'effectif de cette population au 1er juin $2020 + n$. Ainsi $u_0 = 600$

D'une année sur l'autre, 30% des manchots meurent (prédation) et d'autre part 300 manchots rejoignant la colonie (naissances).

Le but de l'exercice est d'estimer la population de manchots à long terme.

1.Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2.A l'aide de la représentation graphique ci-dessous , conjecturer la population des manchots empereurs à long terme. On fera apparaitre sans les calculer les termes u_0 , u_1 , u_2 , u_3 sur l'axe des abscisses.



Démontrons à présent cette conjecture.

3.Démontrer que la suite (u_n) est croissante et majorée . Que peut on en déduire ?

4.Déterminer en justifiant la limite de la suite (u_n).

5.On rappelle que $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 300$.Le but de l'exercice de la suite est de trouver la formule explicite de u_n puis ensuite d'étudier la limite.

a)Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 1000$.

Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Donner v_0 puis exprimer $v_n$en fonction de n.

b) En déduire l'expression de $u_n$en fonction de n.

c) Déterminer en justifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ puis conclure.

Exercice 7 : théorème de convergence

1.Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$ et $u_0 = -3$.

a)Démontrer par récurrence que (u_n)est majorée par 3

b)Déterminer la monotonie de la suite (u_n).

c)En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

2.Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n-3}$.

a)Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

b)En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n puis déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 8 :

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.
3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1520$.
   b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c. Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.
5. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1520$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0{,}95^n + 1520$.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
6. Recopier et compléter le programme ci-dessous pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieure à 2000.

```
n=0
u=3000
while ……… :
      ………
      ………
```

7.La réserve marine fermera t'elle un jour ? Si oui déterminer l'année de fermeture.

Exercice 9 :

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20% par jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries. Le but de l'exercice est d'estimer au bout de combien de temps cet objectif sera réalisé .
On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante : u_n est la masse, en grammes, des bactéries présentes dans la cuve, et n représente le nombre de jours depuis le début du processus.
$u_0 = 1\,000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100$.

1. a) Démontrer , par récurrence , que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1\,000$.
b) Etudier le sens de variation de la suite (u_n).
c) Que peut on en déduire ?
2. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.
a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique, puis exprimer v_n en fonction de n.
b) Démontrer que, pour tout entier n, $u_n = 500 \times 1{,}2^n + 500$
c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. Compte tenu de l'étude précédente, il semble que le modèle est cohérent et que l'objectif sera atteint.
a) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
Ecrire un algorithme pour répondre au problème posé dans la question précédente.
b) A l'aide de la calculatrice, répondre au problème posé.

Exercice 10 :

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'évènement « la n^e partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet évènement. On a donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.
3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	0,25	0,437 5	0,390 6	0,402 3	0,399 4	0,400 1	0,399 9

Quelle conjecture peut-on émettre ?

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.
   a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.
   c. La suite (p_n) converge-t-elle ? Interpréter ce résultat.

Exercice 11 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

▶ **1. a)** Démontrer que pour tout $n \geqslant 3$, $u_n \geqslant 0$. *(0,75 point)*
b) En déduire que pour tout $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant n - 2$. *(0,25 point)*
c) En déduire la limite de la suite (u_n). *(0,25 point)*

▶ **2.** On définit la suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.
a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme. *(0,75 point)*
b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$. *(1 point)*
c) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison. *(1 point)*
d) En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n. *(1 point)*

Exercice 12 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout n de **N** par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$

1. Soit f la fonction définie sur $[2 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x-2}{x+1}$.
a. Étudier les variations de f sur $[2 ; +\infty[$.
b. En déduire que, pour tout x de $[2 ; +\infty[$, $f(x) \geq 2$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2$.
3. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.
4. Prouver que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 13 :

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n, \; u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n. \end{cases}$$

1. a. Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

   b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).
2. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n.$$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
   c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
3. *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite* (u_n).
   Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).
   b. En déduire, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n.$$

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n)

4.Ecrire un programme permettant de déterminer la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 0{,}01$. Quelle est cette valeur ?

Exercice **12 :**

Soit la suite numérique (u_n) définie sur **N** par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 . Puis formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq n + 3$.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 1 - u_n)$.

   c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur **N** par $v_n = u_n - n$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera les éléments caractéristiques.

   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Correction de la fin de l'exercice 3

$\lim\limits_{n\to+\infty} (0,5)^n \cos(n)$

Pour tout entier naturel n , $-1 \leq \cos(n) \leq 1$
On en déduit que $-(0,5)^n \leq \cos(n) \leq (0,5)^n$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -(0,5)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} (0,5)^n = 0$ car -1<0,5<1
D'après le théorème des Gendarmes , $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,5)^n \cos(n) = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n + \sin(n)$
Pour tout entier naturel n , $-1 \leq \sin(n) \leq 1$
On en déduit que $3^n - 1 \leq 3^n + \sin(n) \leq 3^n + 1$
$3^n + \sin(n) \geq 3^n - 1$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n - 1 = +\infty$ car 3>1
D'après le théorème de minoration , $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n + \sin(n) = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(2^n)}{n}$
Pour tout entier naturel n≥1 , $-1 \leq \sin(2^n) \leq 1$
$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(2^n)}{n} \leq \frac{1}{n}$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
D'après le théorème des Gendarmes , $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(2^n)}{n} = 0$

Correction de la fin de l'exercice 3

$\lim\limits_{n\to+\infty} (0,5)^n \cos(n)$

Pour tout entier naturel n , $-1 \leq \cos(n) \leq 1$
On en déduit que $-(0,5)^n \leq \cos(n) \leq (0,5)^n$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -(0,5)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} (0,5)^n = 0$ car -1<0,5<1
D'après le théorème des Gendarmes , $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,5)^n \cos(n) = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n + \sin(n)$
Pour tout entier naturel n , $-1 \leq \sin(n) \leq 1$
On en déduit que $3^n - 1 \leq 3^n + \sin(n) \leq 3^n + 1$
$3^n + \sin(n) \geq 3^n - 1$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n - 1 = +\infty$ car 3>1
D'après le théorème de minoration , $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n + \sin(n) = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(2^n)}{n}$
Pour tout entier naturel n≥1 , $-1 \leq \sin(2^n) \leq 1$
$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(2^n)}{n} \leq \frac{1}{n}$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
D'après le théorème des Gendarmes , $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(2^n)}{n} = 0$

Correction de l'exercice 7:

1.Soit u la suite définie par $u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$ et $u_0 = -3$.

a) Soit P(n) la proposition « $u_n \leq 3$ » (n entier naturel)

1ère étape :initialisation

vérifions que $P(0)$ est vraie

$u_0 = -3$ et $-3 \leq 3$ $P(0)$ est donc vraie

2ème étape : hérédité

Hypothèse : on suppose que pour un entier k quelconque *P(k)* est vraie c'est-à-dire …………… .

But : démontrons alors que *P(k+1)* est vraie c'est-à-dire … … … … … … … … … … … …

… … … … … … … …

… … … … … … … …

… … … … … … … …

… … … … … … … …

… … … … … … … …

Conclusion : la proposition est vraie au rang 0 et est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

b) étude de la monotonie de la suite u

1ère méthode : raisonnement par récurrence

Soit *P(n)* la proposition « $u_n \leq u_{n+1}$ » $n \in N$

1ère étape : montrons que P(0) est vraie (initialisation)

$u_0 = -3$ $et\ u_1 = 1$ $ainsi\ u_0 \leq u_1$ P(0) est donc vraie

2ème étape : (hérédité)

Hypothèse : on suppose que pour un entier k quelconque *P(k)* est vraie c'est-à-dire …………… .

But : démontrons alors que *P(k+1)* est vraie c'est-à-dire … … … … … … … … … … … …

… … … … … … … …

… … … … … … … …

… … … … … … … …

… … … … … … … …

… … … … … … … …

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire.

Par conséquent$\forall n \in N$, *P(n)* est vraie cad $\forall n \in N$, $u_n \leq u_{n+1}$

2ème méthode : raisonnement direct : signe de $u_{n+1} - u_n$

Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{9}{6-u_n} - u_n = \frac{9-(6-u_n)u_n}{6-u_n} = \frac{9-6u_n+{u_n}^2}{6-u_n} = \frac{{u_n}^2-6u_n+9}{6-u_n} = \frac{(u_n-3)^2}{6-u_n}$$

Or pour tout entier naturel n, $(u_n - 3)^2 \geq 0$

De plus , $u_n \leq 3$ d'où $-u_n \geq -3$ et $6 - u_n \geq 3$ soit encore $6 - u_n > 0$

On en déduit donc que $\frac{(u_n-3)^2}{6-u_n} \geq 0$ $soit$ $u_{n+1} - u_n \geq 0$ .La suite (u_n) est donc croissante.

c) La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 3. D'après le **théorème de convergence des suites monotones**, la suite u converge vers un réel L.
$u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur [3 ;+∞[par $f(x) = \frac{9}{6-x}$
La suite (u_n) converge vers L et la fonction f est continue sur ℝ.
D'après le théorème du point fixe, L est solution de l'équation $f(L) = L$.

Soit : ………………………………………………………………..

La suite (u_n) converge donc vers 3.

2.Soit la suite v définie par $v_n = \frac{1}{u_n-3}$.
a)démontrons que pour tout entier naturel *n* , $v_{n+1}=v_n - \frac{1}{3}$

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}-3} = \frac{1}{\frac{9}{6-u_n}-3} = \frac{1}{\frac{9-3(6-u_n)}{6-u_n}} = \frac{1}{\frac{-9+3u_n}{6-u_n}} = \frac{6-u_n}{-9+3u_n}$$

$$v_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{u_n-3} - \frac{1}{3} = \frac{3-(u_n-3)}{3(u_n-3)} = \frac{6-u_n}{-9+3u_n}$$

Ainsi $v_{n+1}=v_n - \frac{1}{3}$.
La suite (v_n) est donc **arithmétique** de 1er terme $v_0 = \frac{1}{u_0-3} = -\frac{1}{6}$ de raison $r = -\frac{1}{3}$
b) pour tout entier naturel *n* , $v_n = v_0 + nr = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3}n$
$v_n = \frac{1}{u_n-3}$. Ainsi $u_n - 3 = \frac{1}{v_n}$
Soit $u_n = \frac{1}{v_n} + 3 = \frac{1}{-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}n} + 3$

$c)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{6} - \frac{1}{3}n = -\infty$.
On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

Correction de l'exercice 8

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3000 cétacés dans cette réserve au 1[er] juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en réserve marine ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année:

- entre le 1[er] juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine;
- entre le 1[er] novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1[er] juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.

L'effectif de cétacés au 31 octobre 2017 est de 3000 + 80, c'est-à -dire 3080. Entre le 1[er] novembre et le 31 mai, une baisse de 5 % a lieu, l'effectif au 1[er] juin 2018 est donc:

$$u_1 = 3080 - 5\% \times 3080 = 3080 \times 0{,}95 = 2926$$

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.

En généralisant, on a, pour tout entier naturel n:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (u_n + 80) \times 0{,}95 \\ &= 0{,}95u_n + 80 \times 0{,}95 \\ &= 0{,}95u_n + 76 \end{aligned}$$

3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3000	2926	2856	2789	2725	2665	2608	2553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

Formule à entrer dans la cellule C2: = **0.95*B2 + 76** .

4. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1520$.

$u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$ et $u_0 = 3000$.

Soit P(n) la proposition « $u_n \geq 1520$ » (n entier naturel)

<u>1[ère] étape :initialisation</u>

vérifions que $P(0)$ est vrai

$u_0 = 3000$ et $3000 \geq 1520$ $P(0)$ est donc vraie

<u>2[ème] étape : hérédité</u>

Hypothèse : on suppose que pour un entier k quelconque *P(k)* est vraie c'est-à-dire …………… .

But : démontrons alors que *P(k+1)* est vraie c'est-à-dire … … … … … … … … … … …

… … … … … … … …

… … … … … … … …

… … … … … … … …

… … … … … … … …

… … … … … … … …

Conclusion : la proposition est vraie au rang 0 et est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

(b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

Pour tout entier naturel n,
$u_{n+1}-u_n =$ … … … … … … … … … … … … … … … … …

Or pour tout entier naturel n, … … … … … … … … … … … ….

……………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………….
On en déduit donc que $u_{n+1}-u_n \leq 0$ .La suite (u_n) est donc décroissante.

(c) Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.

La suite (u_n) est …………………………………
D'après le **théorème de convergence des suites monotones**, la suite u converge vers un réel L.

5. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1520$.
(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1520 \\ &= 0{,}95u_n + 76 - 1520 \\ &= 0{,}95u_n - 1444 \\ &= 0{,}95\left(u_n - \frac{1444}{0{,}95}\right) \\ &= 0{,}95(u_n - 1520) \\ &= 0{,}95v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,95.
Son premier terme est $v_0 = u_0 - 1520 = 1480$.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0{,}95^n + 1520$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = 1480 \times 0{,}95^n$.
Et comme $v_n = u_n - 1520$, on en déduit que $u_n = v_n + 1520$, ce qui donne bien

$$u_n = 1480 \times 0{,}95^n + 1520.$$

(c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

$-1 < 0{,}95 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}95^n = 0$, on en déduit, par opérations sur les limites que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1520$.

6. Recopier et compléter le programme ci-dessous pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieure à 2000.

```
n=0
u=3000
while ……… :
        ………
        ………
```

7.La réserve marine fermera t'elle un jour ? Si oui déterminer l'année de fermeture.
La limite de la suite (u_n) est 1520 qui est inférieur à 2000, donc la réserve fermera un jour.
Pour déterminer l'année de fermeture, on peut programmer l'algorithme précédent.
C'est donc la 22ème année que la réserve fermera, soit en 2039.