Exercices sur le chapitre 4

Exercice 1 : résolution d'équations

Les questions sont indépendantes.

1.Résoudre dans]0 ;+∞[, l'équation $3ln(x) - 2 = 5$.
2.Résoudre dans ℝ , l'équation : $3e^{x} + 1 = 5 - 2e^{x}$.
3.Soit l'équation $ln(3x - 6) = ln(2)$.
a) A quelle condition portant sur $3x - 6$, l'équation a-t-elle un sens ?
b) Donner l'ensemble de définition puis résoudre l'équation.
4. Soit l'équation :$ln(5 + 3x) = ln(9 - x^2)$.
a) A quelle condition portant sur $5 + 3x \ et \ 9 - x^2$, l'équation a-t-elle un sens ?
b)Déterminer l'ensemble de définition puis résoudre l'équation.

Exercice 2 : résolution d'inéquations

Les questions sont indépendantes.

1.Résoudre dans]0 ;+∞[, l'inéquation $2ln(x) - 3 > 0$.
2.Résoudre dans R, l'inéquation $-3e^{x} + 5 > -1$.
3.Soit l'inéquation $\ln(x^2 - x - 6) < \ln(3x - 1)$.
a) A quelle condition portant sur $x^2 - x - 6 \ et \ 3x - 1$, l'inéquation a-t-elle un sens ?
b) Donner l'ensemble de définition puis résoudre l'inéquation.

Exercice 3 : variations d'une fonction

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1.Soit la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x) = 3e^{x} - 2x$.
a) Donner sans justifier $f'(x)$.
b) Résoudre l'inéquation $3e^{x} - 2 > 0$.
c) Déterminer le tableau de variations de la fonction *f*.
2.Soit la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x) = x + 6e^{-0,5x}$.
a) Donner sans justifier $f'(x)$.
b) Résoudre l'inéquation $1 - 3e^{-0,5x} > 0$.
c) Déterminer le tableau de variations de la fonction *f*.
3.

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000 °C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit.

On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint.

La température du four est exprimée en degré Celsius (° C).

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70° C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

On admet que pour tout réel *t* positif, $f(t) = 980e^{-\frac{t}{5}} + 20$
Après combien de minutes, le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

Exercice 4 : étude de limites impliquant la fonction ln

Les questions sont indépendantes.

1.Etudier $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(2x^2 + 1)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(e^{x} + \frac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$.
2.Etudier $\lim\limits_{x \to 0} e^{x\ln(x)}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - \ln(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)-x}{\ln(x)+x}$.

Exercice 5 : étude de fonctions impliquant la fonction ln

Les questions 1,2,3sont indépendantes.

1.Soit la fonction *f* définie sur]0 ;+∞[par $f(x) = xln(x) + 2x$
a) Etudier $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \ et \ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
b) Déterminer $f'(x)$.
c) Résoudre l'inéquation $\ln(x) + 3 > 0$.
d) Déterminer le tableau de variations de la fonction *f*.

2.Soit f la fonction définie sur]0 ;+∞[par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

a) Etudier $\lim_{x \to 0} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Résoudre dans]0 ;+∞[l'inéquation : $1 - \ln(x) > 0$.

c) Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau des variations de la fonction *f*. En déduire que *f* admet un maximum.

3.Soit f la fonction définie sur]0 ;+∞[par $f(x) = x - 2ln(x)$.

a) Etudier $\lim_{x \to 0} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Démontrer que pour tout réel x>0, $f'(x) = \frac{x-2}{x}$.

c) Dresser le tableau de variations de f sur]0 ;+∞[.

Exercice 6 : étude d'une fonction du type ln(u)

Soit la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

a) Etudier $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Déterminer $f'(x)$.

c) Déterminer le tableau de variations de la fonction *f*.

Exercice 7 : application économique des fonctions

Partie A

Soit *f* la fonction définie sur [1 ; 6] par $f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln(x)$.

1.Montrer que pour tout réel x>0, $f'(x) = \frac{-2x^2+10x-8}{x}$.

2.Pourquoi $f'(x)$ est il du signe de $-2x^2 + 10x - 8$?

3.Dresser le tableau de variations de *f* sur [1 ; 6]

Partie B

Une entreprise produit et vend des pièces pour hélicoptères.
Pour des raisons de stockage, sa production mensuelle est comprise entre 100 et 600 pièces.
Elle vend tout ce qui est produit. On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle [1 ; 6] par $f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln(x)$. *f*(*x*) représente le bénéfice mensuel, exprimé en dizaine de milliers d'euros, obtenu pour la vente de *x* centaines de pièces. Quelle est la quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximal ? Calculer ce bénéfice arrondi à l'euro près.

Exercice 8: étude d'une fonction

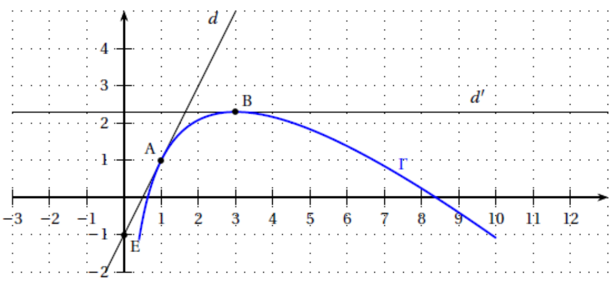
Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

La fonction f est définie sur l'intervalle [0,5; 10] par :

$$f(x) = ax + 2 + b\ln(x)$$

où a et b sont deux nombres réels.
On note f' la fonction dérivée de f.
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative Γ de la fonction f ;
- la droite d tangente à la courbe Γ au point A de coordonnées (1 ; 1) ;
- la droite d' tangente à la courbe Γ au point B d'abscisse 3.



On sait de plus que :

- la tangente au point A passe par le point E de coordonnées (0 ; −1).
- la tangente au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

Partie A

1. Donner par lecture graphique la valeur de $f'(1)$, puis celle de $f'(3)$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. En déduire les valeurs des nombres a et b.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0,5\,;\,10]$ par :

$$f(x) = -x + 2 + 3\ln(x).$$

1. Montrer que pour x dans $[0,5\,;\,10]$,
$$f'(x) = \frac{-x+3}{x}.$$
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0,5;\,10]$, puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
4. Montrer que sur l'intervalle $[0,5\,;\,3]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution. Donner une valeur approchée de cette solution arrondie au centième.

Exercice 9: étude d'une fonction

On définit une fonction g sur l'intervalle $[0,5\,;\,5]$ par

$$g(x) = 5x - 3x\ln x.$$

1. Montrer que pour x appartenant à $[0,5\,;\,5]$, $g'(x) = 2 - 3\ln x$.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ et en déduire le sens de variation de g sur $[0,5;5]$.
3. En déduire pour quelle valeur x_0, arrondie au centième, la fonction g atteint un maximum.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 4$ admet deux solutions sur $[0,5;5]$ que l'on note α_1 et α_2. En donner un encadrement d'amplitude 0,01.

Exercice 10: étude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1\,;\,45]$ par

$$g(x) = -20x + 5x\ln(x) + 30.$$

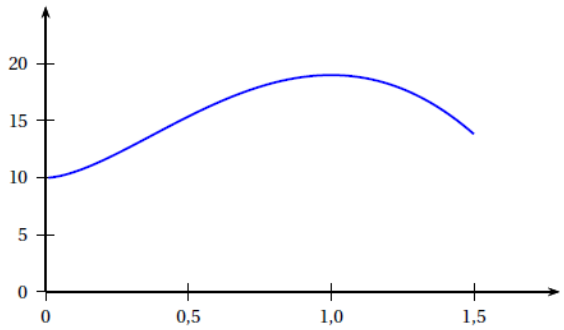
1. **a.** On note g' la fonction dérivée de g.
Montrer que, pour tout x appartenant à $[1\,;\,45]$, on a $g'(x) = -15 + 5\ln(x)$.
b. Montrer que l'inéquation $-15 + 5\ln(x) \geqslant 0$ est équivalente à $x \geqslant e^3$.
c. Dresser le tableau de variations de la fonction g (les valeurs seront arrondies au centième si besoin).
2. **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;\,45]$.
b. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01.
c. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x dans l'intervalle $[1\,;\,45]$.

Exercice 11: étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,1,5]$ par

$$f(x) = 9x^2(1 - 2\ln x) + 10.$$

La courbe représentative de f est donnée ci-dessous :



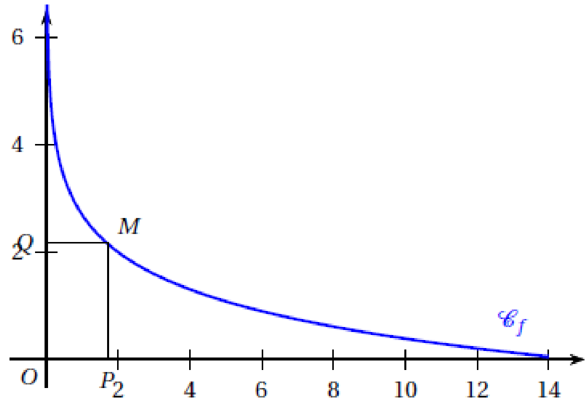
1. **a.** Montrer que $f'(x) = -36x\ln x$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,1,5]$.
b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,1,5]$.
c. Déduire de la question précédente les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,1,5]$.
2. On admet que $f''(x) = -36\ln x - 36$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,1,5]$.
Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est e^{-1}.

Exercice 12 : pondichery 2016 – prise d'initiative

Soit f la fonction définie sur $]0\,;14]$ par

$$f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

L'aire du rectangle $OPMQ$ peut-elle être maximale ?
Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant. Justifier !

Exercice 13 : résolution d'équations et d'inéquations

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1.Soit l'inéquation $\ln(x-2) + \ln(2) \geq \ln(3x-9)$

a) A quelle condition portant sur $x - 2$ *et* $3x - 9$, l'inéquation a-t-elle un sens ?

b)Donner l'ensemble de définition.

c)Résoudre l'inéquation.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\ln(x-3) + \ln(9-x) = 0$

(on devra chercher préalablement l'ensemble de définition de l'équation)

Exercice 14 : application des propriétés algébriques de ln

Les questions sont indépendantes.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^9 = 4$.
2. Déterminer le plus petit entier n, tel que $0{,}7^n < 0{,}0001$.
3. Déterminer le plus petit entier n, tel que $1{,}02^n > 10\,000$.
4. Déterminer le plus petit entier n, tel que $-4 \times 0{,}9^n + 3 > 2{,}999$

Exercice 15:

1. Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{2-u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$.
   (a) Calculer u_1, u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.
   (b) Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.
   (c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.
2. Soit v la suite de terme général v_n défini par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
   (a) Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.
   (b) Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel non nul n par :

   $$S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n.$$

   Exprimer S_n en fonction de n.
   Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit l'inéquation $\ln(x^2 - x - 6) < \ln(3x - 1)$.

a) b)L'inéquation a un sens si $x^2 - x - 6 > 0$ et $3x - 1 > 0$

$$3x - 1 > 0 \; si \; x > \frac{1}{3}$$

Résolvons l'équation du second degré $x^2 - x - 6 = 0$ *a=1,b=-1 ,c=-6*

On trouve Δ=b²-4ac $= 25$

Δ>0. Il y a donc deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2} = 3$$

x	*-∞*		*-2*	$\frac{1}{3}$		*3*		*+∞*
$x^2 - x - 6$		*+*	*0*		*-*	*0*	*+*	
		Signe de a			*Signe de -a*		*Signe de a*	

Le domaine de définition est donc D =]3 ;+∞[

c) $\ln(x^2 - x - 6) < \ln(3x - 1)$

$e^{\ln(x^2-x-6)} < e^{\ln(3x-1)}$

$x^2 - x - 6 < 3x - 1$

$x^2 - x - 6 - 3x + 1 < 0$

$x^2 - 4x - 5 < 0$

Résolvons l'équation du second degré $x^2 - 4x - 5 = 0$ *a=1,b=-4 ,c=-5*

On trouve Δ=b²-4ac $= 36$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{36}}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + \sqrt{36}}{2} = 5$$

x	$-\infty$ -1 3 5 $+\infty$
x^2-4x-5	+ 0 - 0 + *Signe de a* *Signe de -a* *Signe de a*

Compte tenu du domaine de définition,
$x^2-4x-5<0$ *si 3<x<5*

S=]3 ;5[