Chapitre 15 : les fonctions de référence

I- La fonction carré

1. Définition

Définition :
La **fonction carré** f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Exemples : calcul d'images

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

2.Parité :

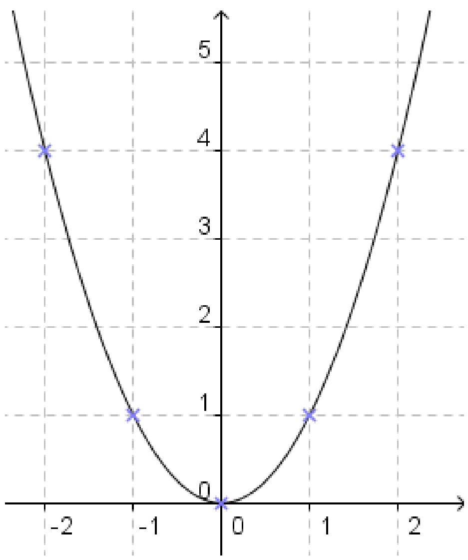
Propriété:
la **fonction carré** f est ………..

Preuve :
Pour tout réel x, $f(-x) =$ … … … … … … … … … … … ….

Conséquence graphique :
Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction carré admet …………………………………………………………………….. comme axe de symétrie.

3.Représentation graphique

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4



Remarques :
- Le tableau de valeurs n'est pas un tableau de proportionnalité. La fonction carré n'est donc pas une fonction linéaire.
- Dans un repère (O, I, J), la courbe d'équation $y = x^2$ de la fonction carré est appelée une **parabole** de sommet O.

4.Variations et conséquences

Propriété :
La fonction carré f est …………………….. sur l'intervalle $]-\infty\ ; 0]$ et ………………… sur l'intervalle $[0\ ; +\infty[$.

Tableau de variations

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x) = x^2$	

Conséquence : la fonction carrée admet un minimum en $x =$ … de valeur … … … ..

Tableau de signe

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x) = x^2$	

La fonction carrée est strictement positive sauf en 0 où elle s'annule.

Démonstration au programme :

Vidéo : mathssa.fr/ine3

On pose : $f(x) = x^2$.

- Soit a et b deux nombres réels quelconques positifs tels que $a < b$.

$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$

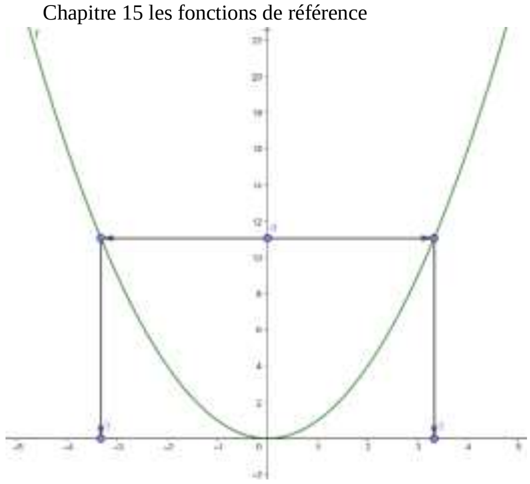
Or $b - a > 0$, $a \geq 0$ et $b \geq 0$ donc $f(b) - f(a) \geq 0$ ce qui prouve que f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

- La décroissance sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ est prouvée de manière analogue en choisissant a et b deux nombres réels quelconques négatifs tels que $a < b$.

Propriété : a et b sont deux nombres réels , on a alors :
Si $0 < a < b \quad alors \quad a^2 < b^2$
Si $a < b < 0 \quad alors \quad a^2 > b^2$

4.Equation du type $x^2 = a$ $(a > 0)$

Propriété :
L'équation $x^2 = a$ avec $a > 0$ admet exactement 2 solutions $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$



Preuve :

$x^2 = a$ équivaut à $x^2 - a = 0$

équivaut à $x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$

$équivaut$ à $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$

$équivaut$ à $x - \sqrt{a} = 0 \;\; ou \;\; x + \sqrt{a} = 0$

$équivaut$ à $x = \sqrt{a} \;\; ou \;\; x = -\sqrt{a}$

Application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = 5$.

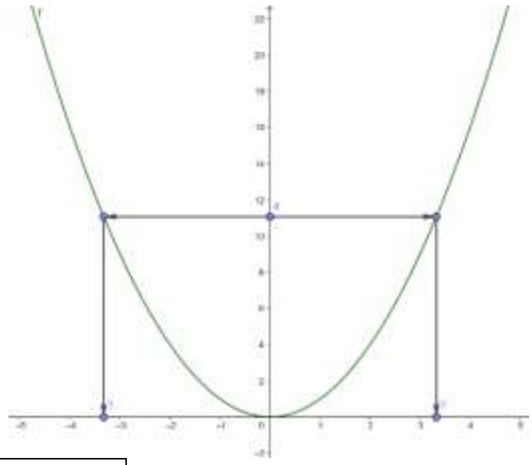
Les solutions sont … … … … … … …. S = {… … … … … … .. }

5.Inéquation du type $x^2 < a$ ou $x^2 > a$ $(a > 0)$

Propriété :

L'inéquation $x^2 < a$ avec $a > 0$ admet pour solutions les réels de l'intervalle $]-\sqrt{a} \,;\, \sqrt{a}[$.

L'inéquation $x^2 > a$ avec $a > 0$ admet pour solutions les réels de l'intervalle $]-\infty; -\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}; +\infty[$



Preuve :

$x^2 > a$ équivaut à $x^2 - a > 0$

équivaut à $x^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 > 0$

$équivaut$ à $\left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right) > 0$

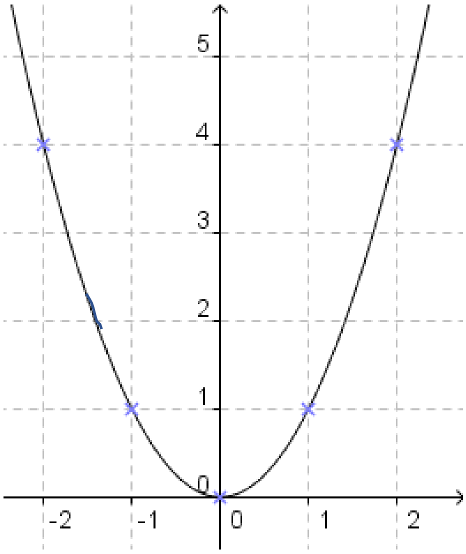
$x - \sqrt{a} > 0$ $\qquad\qquad$ $x - \sqrt{a} > 0$

$x > \sqrt{a}$ $\qquad\qquad$ $x > -\sqrt{a}$

x	$-\infty$ $\quad$ $-\sqrt{a}$ $\quad$ $\sqrt{a}$ $\quad$ $+\infty$
$x - \sqrt{a}$	-
$x + \sqrt{a}$	
$\left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right)$	

$\left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right) > 0$ lorsque $x \in]-\infty; -\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}; +\infty[$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right) > 0$ est $x \in]-\infty; -\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}; +\infty[$



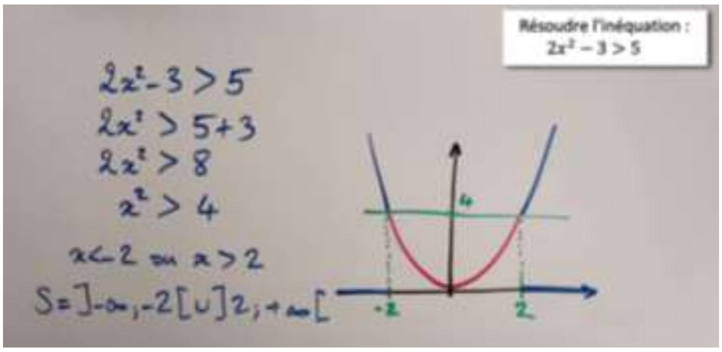
Application :

Résoudre dans ℝ l'inéquation $x^2 > 3$.

S=……………………

Résoudre une inéquation avec la fonction carré :

Vidéo : mathssa.fr/ine4 4mns12s



Exercice :

Une entreprise fabrique et vend chaque mois entre 50 et 100 vélos.

Le prix en € de vente **d'un vélo**, est $p = x - 40$ où x est le nombre de vélos fabriqués ($50 \leq x \leq 100$)

Le montant, en € , des dépenses pour la fabrication de x vélos est $d = 4900 - 40x$.

On suppose que l'entreprise vend l'ensemble des vélos fabriqués.

1.Démontrer que la recette de la société est $R = x^2 - 40x$. ($50 \leq x \leq 100$)

2.Déterminer, à partir de combien de vélos fabriqués l'entreprise réalise un bénéfice. (on admettra que les recettes et les dépenses varient entre 0 et 6000 – on réalise un bénéfice dès que $R > d$)

1. $R =$ … ..

2. On résout l'inéquation R>d.

$x^2 - 40x > 4900 - 40x$

… … … … … … … … … … … … …

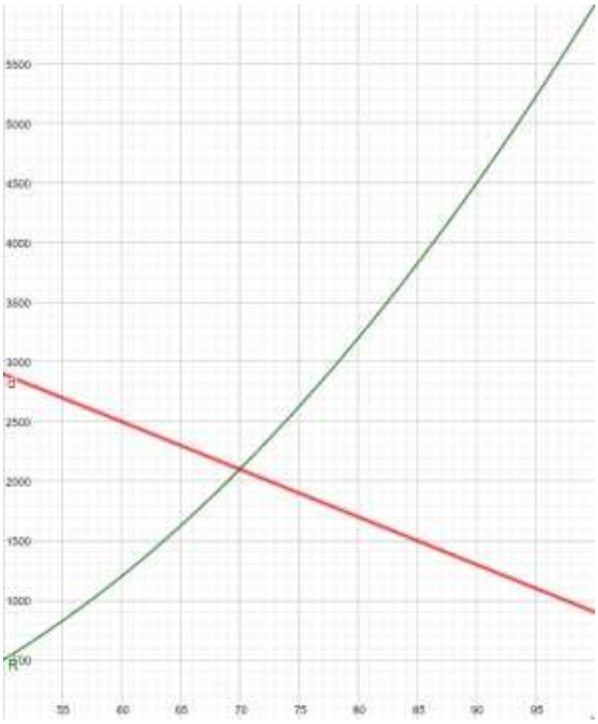
… … … … … … … … … … … … …

… … … … … … … … … … … … …

… … … … … … … … … … … … …

… … … … … … … … … … … … … Il faut donc produire au minimum …. vélos.

On représente les courbes de R et de d à l'écran de la calculatrice (on prend [50 ;100] pour x et [0 ;6000] pour y)



On résout l'inéquation R>d.
On retrouve $x > 70$. Il faut donc produire au minimum 71 vélos

II- La fonction inverse

1.Définition

Définition :

La **fonction inverse** *f* est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Remarques :
- $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ désigne l'ensemble des nombres réels sauf 0, c'est-à-dire] –∞ ; 0 [U] 0 ; +∞ [. On peut aussi noter cet ensemble $\mathbb{R}^*$.
- La fonction inverse n'est pas définie en 0.

Exemples : calcul d'images

x	–2	–1	0,25	1	2	3
f(*x*)						

2.Parité :

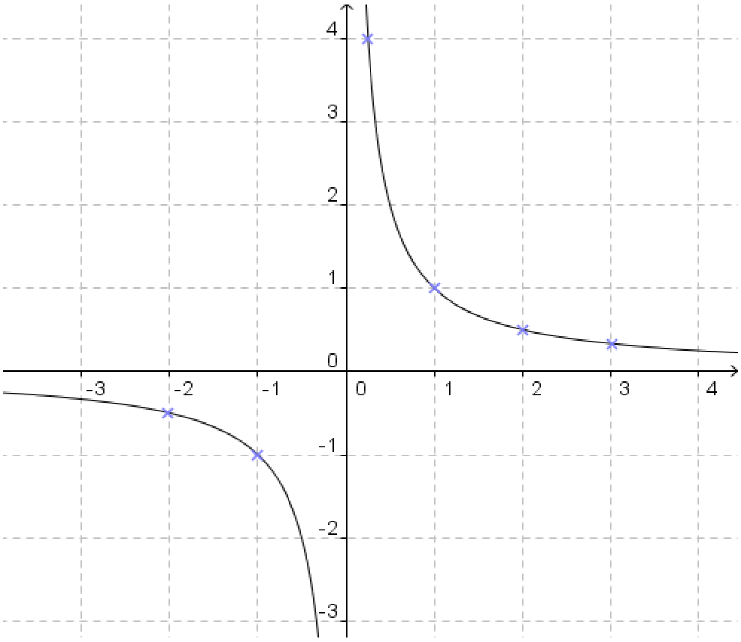
Propriété:
la **fonction inverse** est impaire.

Preuve : Pour tout réel x, $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$

Conséquence graphique :
Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction inverse admet l'origine O comme centre de symétrie.

3.Représentation graphique

x	-2	-1	0,25	1	2	3
$f(x)$	$-0,5$	-1	4	1	0,5	$\frac{1}{3}$

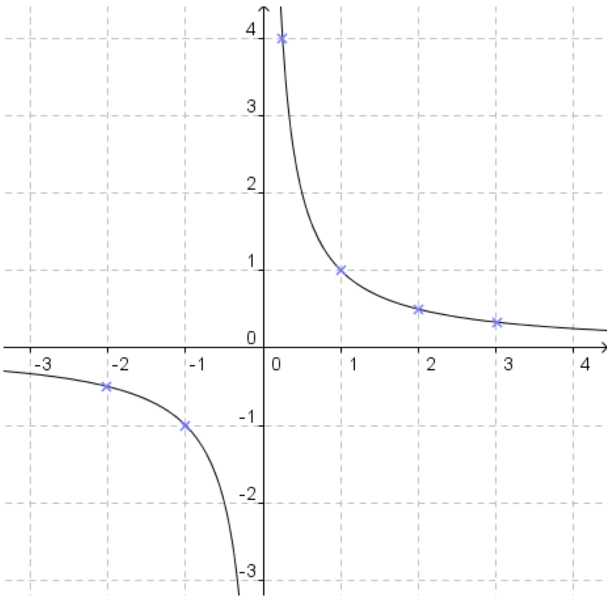


Remarque : Dans un repère (O, I, J), la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ de la fonction inverse est une **hyperbole** de centre O.

4.Variations et conséquences

Propriété :
La fonction inverse est ……………….. sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ et …………………….. sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Remarque :
La variation d'une fonction ne peut s'étudier que sur un intervalle.
On ne peut donc pas évoquer de décroissance sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ qui n'est pas un intervalle mais conclure de manière séparée que la fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.



Démonstration au programme :

Vidéo : mathssa.fr/ine5   7mns37s

On pose : $f(x) = \frac{1}{x}$.

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs avec $a < b$.

$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$

Or $a > 0$, $b > 0$ et $a - b < 0$. Donc $f(b) - f(a) \leq 0$.

f est ainsi décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

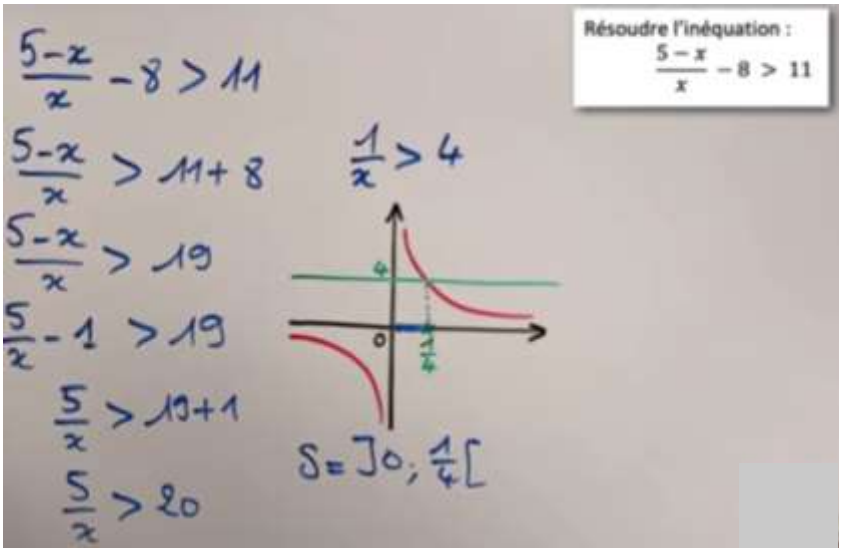
- La décroissance sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ est prouvée de manière analogue.

Tableau de variations

x	$-\infty$	a	b	0	a	b	$+\infty$
$f(x) = x^2$		$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	‖	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	

<u>Résoudre une inéquation avec la fonction inverse :</u>

Vidéo : mathssa.fr/ine6 7mns42

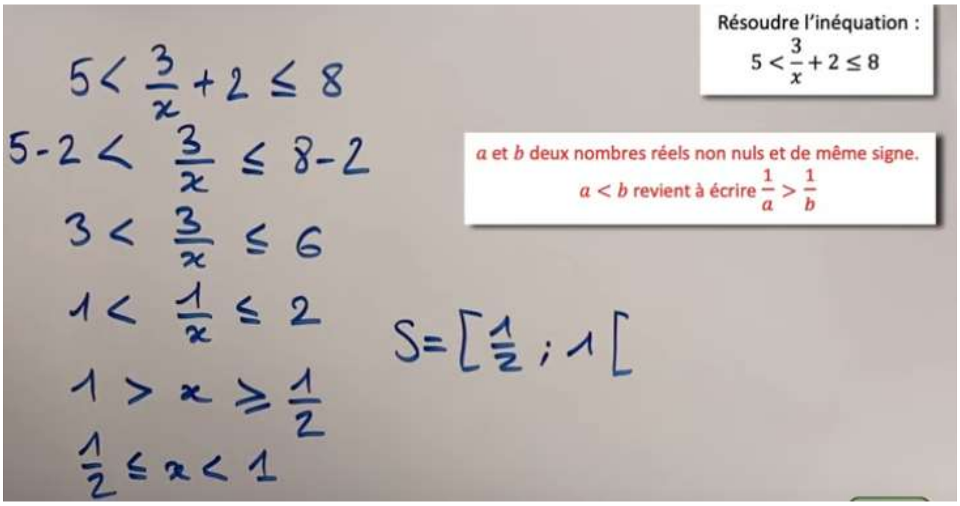


<u>Propriété :</u> a et b sont deux nombres réels de même signe, on a alors :
$a < b$ revient à écrire $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

En effet, la fonction inverse étant décroissante, l'ordre est renversé.

<u>Résoudre une inéquation avec la fonction inverse :</u>

Vidéo : mathssa.fr/ine7 4mns17s



III- La fonction racine carrée

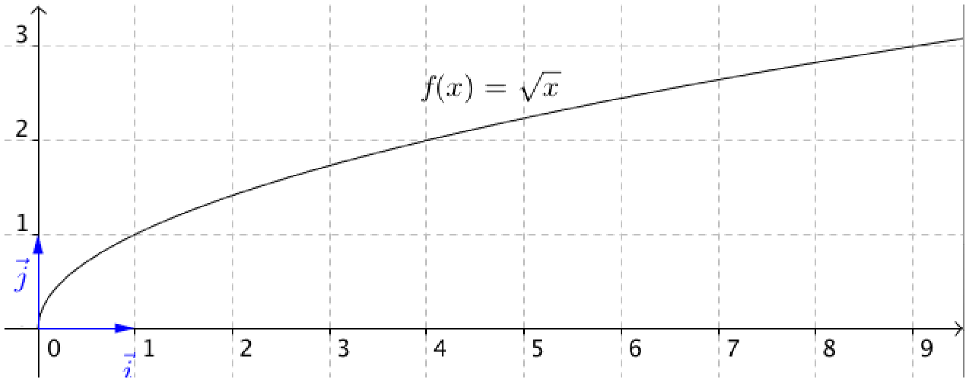
1.Définition

Définition :
La **fonction racine carrée** est la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

Exemples : calcul d'images

x	–2	–1	0	1	4	9
$f(x)$						

2.Représentation graphique



Remarque : La fonction racine carrée n'est pas définie pour des valeurs négatives.

3.Variations et conséquences

Propriété :
La fonction racine carrée est …………………. sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Démonstration au programme :

On pose : $f(x)=\sqrt{x}$.

Vidéo : mathssa.fr/ine10 7mns25s

On pose : $f(x)=\sqrt{x}$.
Soit a et b deux nombres réels positifs tels que $a<b$.

$$f(b)-f(a)=\sqrt{b}-\sqrt{a}=\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{b}^2-\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}=\frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}.$$

Or $\sqrt{b}+\sqrt{a}>0$ et $b-a>0$. Donc $f(b)-f(a)>0$
Donc $f(a)<f(b)$.
Ce qui prouve que f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

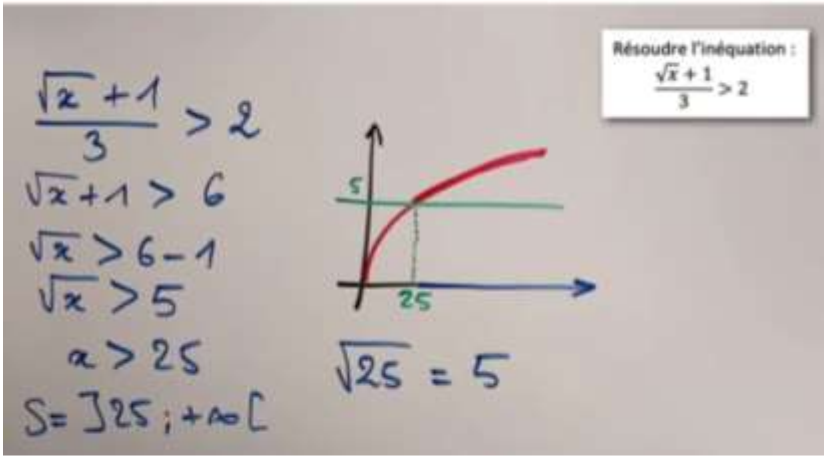
Tableau de variations

x	0 $\qquad$ a $\qquad$ b $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	

Propriété : Si a et b sont deux nombres réels positifs, on a alors :
$a < b \quad revient\ à\ écrire \quad \sqrt{a} < \sqrt{b}$

En effet, la fonction racine carrée étant croissante, l'ordre est conservé.

Résoudre une inéquation avec la fonction racine carrée :
Vidéo : mathssa.fr/ine8 5mns12s



IV- La fonction cube

1.Définition

Définition :
La **fonction cube** est la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^3$.

Exemples : calcul d'images

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$					

2.Parité :

Propriété:
la **fonction cube** est …………..

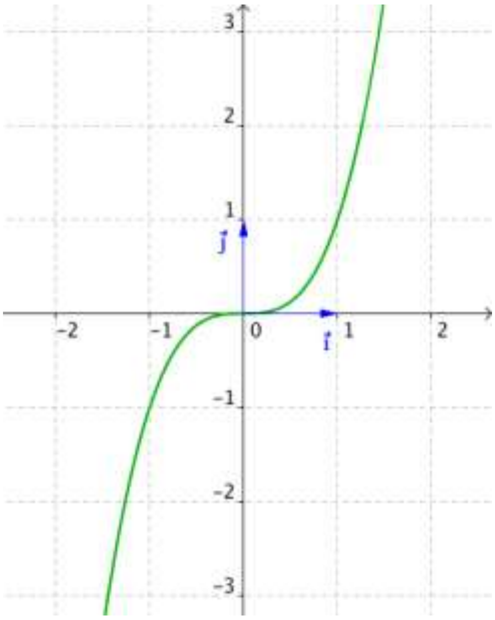
Preuve :
Pour tout réel x, $f(-x) =$ … … … … … … … … … … … … … … … … … ..

Conséquence graphique :
Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction cube admet l'origine O comme …………………………………………………………………..

3.Représentation graphique

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-1	0	1	8

.



3.Variations et conséquences

Propriété :
La fonction cube est ……………………………. sur $\mathbb{R}$

Preuve : admis

Tableau de variations et tableau de signe

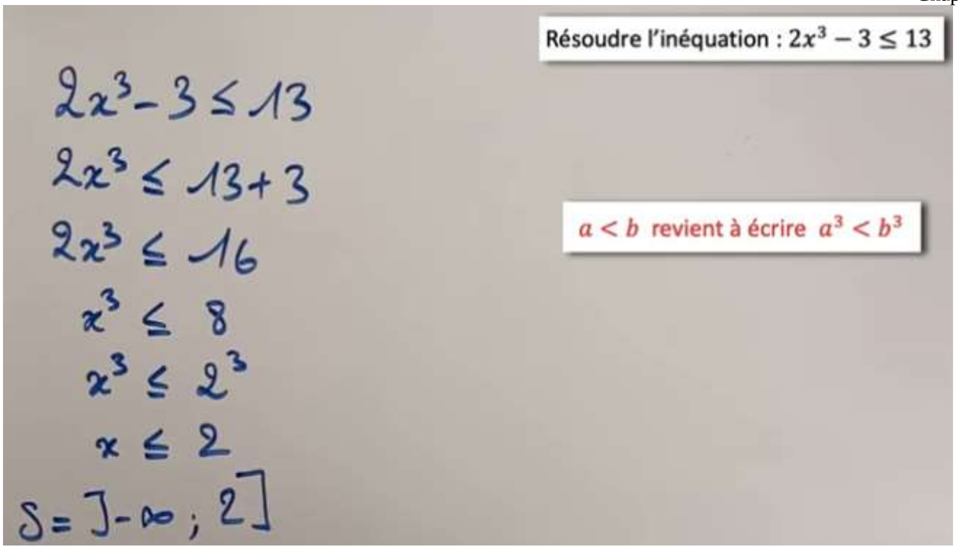
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^3$			

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^3$			

Propriété :
$a < b \quad revient \text{ à } \acute{e}crire \quad a^3 < b^3$

En effet, la fonction cube étant croissante, l'ordre est conservé.

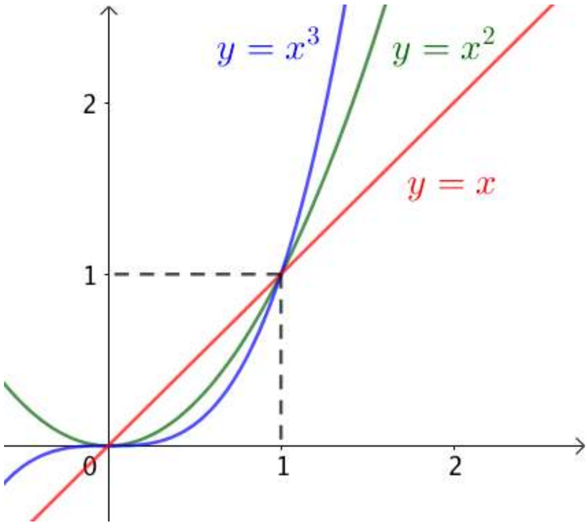
Résoudre une inéquation avec la fonction cube : Vidéo : mathssa.fr/ine11



4.Positions relatives des courbes d'équations : $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$

Pour des valeurs positives de x, on a :

- Si $x \geq 1$: La courbe d'équation $y = x^3$ se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = x^2$ qui se trouve elle-même au-dessus de la courbe d'équation $y = x$.
- Si $0 \leq x \leq 1$: L'ordre précédent est inversé.



Démonstration au programme : Vidéo mathssa.fr/ine9 8mns38s

1er cas : si $x \geq 1$:
- Pour étudier les positions relatives des courbes d'équations $y = x$ et $y = x^2$, il suffit d'étudier le signe de $x^2 - x$.
Or, $x^2 - x = x(x - 1) \geq 0$ car $x \geq 1$.
Donc, la courbe d'équation $y = x^2$ se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = x$.
- Pour étudier les positions relatives des courbes d'équations $y = x^2$ et $y = x^3$, il suffit d'étudier le signe de $x^3 - x^2$.
Or, $x^3 - x^2 = x^2(x - 1) \geq 0$ car $x \geq 1$.
Donc la courbe d'équation $y = x^3$ se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = x^2$.

2e cas : si $0 \leq x \leq 1$:
- Dans ce cas, $x^2 - x = x(x - 1) \leq 0$ car $x \geq 0$ et $x - 1 \leq 0$.
Donc, la courbe d'équation $y = x^2$ se trouve en dessous de la courbe d'équation $y = x$.
- Et, $x^3 - x^2 = x^2(x - 1) \leq 0$ car $x - 1 \leq 0$.
Donc la courbe d'équation $y = x^3$ se trouve en dessous de la courbe d'équation $y = x^2$.